

## § 8. Конформные отображения элементарными функциями

### Справочные сведения

#### 1. Степенная функция.

Пусть  $t \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим на области  $G = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$  функцию

$$w = |z|^t e^{it \arg z}, \quad \text{где } \arg z \in (0, 2\pi). \quad (1)$$

Эта функция регулярна на  $G$ . Причем при  $t \neq 0$  функция (1) однолистка на области  $D \subset G$ , если  $D$  не содержит двух различных точек  $z_1, z_2$ , таких, что  $z_2 = z_1 \cdot e^{2\pi ik/t}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

В частности, при  $t > 0$  функция (1) осуществляет конформное отображение угловой области  $G_{0, \varphi_0} = \{z: |z| > 0, 0 < \arg z < \varphi_0\}$ , где  $\varphi_0 \leq 2\pi$ ,  $|t|\varphi_0 \leq 2\pi$ , на угловую область  $G_{0, t\varphi_0}$  (рис. 8.1).

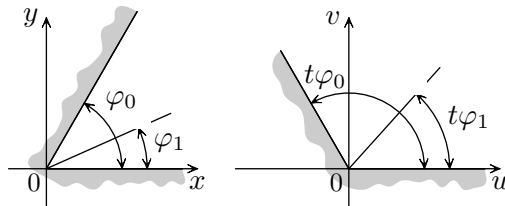


Рис. 8.1

Например, функция  $w = z^2$  конформно отображает

- 1) верхнюю полуплоскость  $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$  на плоскость с разрезом  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$  (рис. 8.2);
- 2) полукруг  $\{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  на круг с разрезом  $\{w: |w| < 1\} \setminus [0, 1)$  (рис. 8.3);
- 3) полуплоскость  $\{z: \operatorname{Im} z > a > 0\}$  на внешность параболы  $\{w = u + iv: v^2 > 4a^2(u + a^2)\}$  (рис. 8.4).

#### 2. Экспоненциальная функция.

Функция  $w = e^z$  осуществляет конформное отображение в области  $D \subset \mathbb{C}$  тогда и только тогда, когда  $D$  не содержит

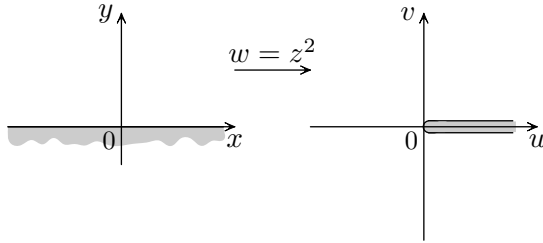


Рис. 8.2

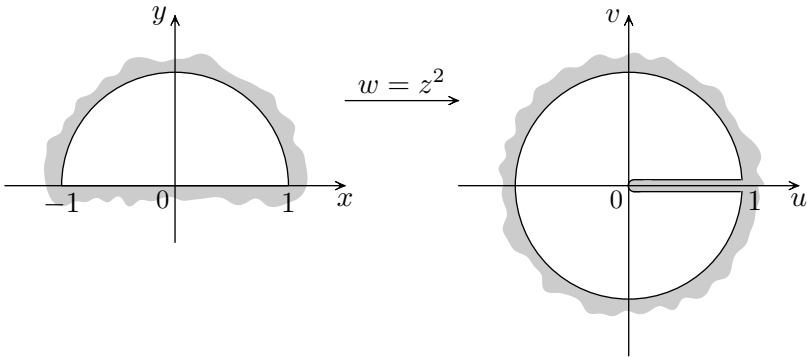


Рис. 8.3

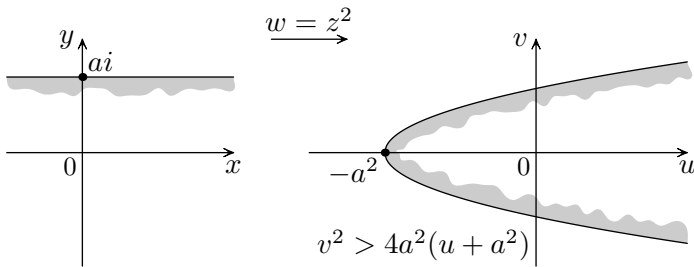


Рис. 8.4

двух различных точек  $z_1, z_2$ , таких, что  $z_2 = z_1 + 2\pi ki$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Например, функция  $w = e^z$  конформно отображает

1) полосу  $\{z: 0 < \text{Im } z < \pi\}$  на верхнюю полуплоскость  $\{w: \text{Im } w > 0\}$  (рис. 8.5);

2) полуполосу  $\{z: \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$  на полукруг  $\{w: |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$  (рис. 8.6);

3) полуполосу  $\{z: \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$  на область  $\{w: |w| > 1, \operatorname{Im} w > 0\}$  (рис. 8.7).

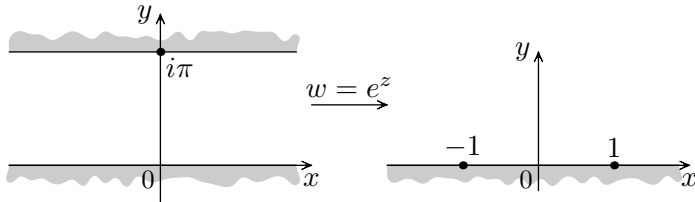


Рис. 8.5

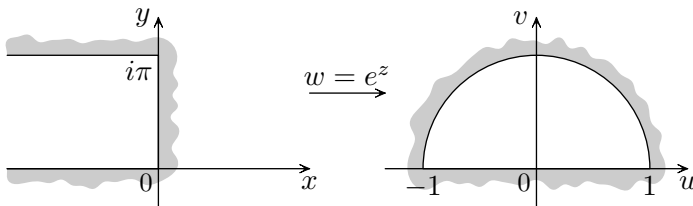


Рис. 8.6

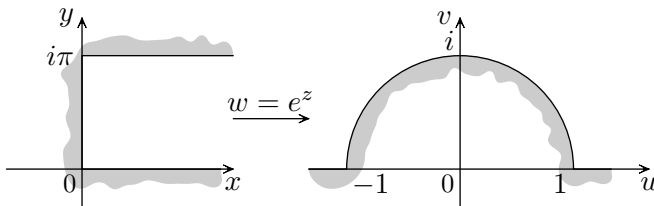


Рис. 8.7

**3. Логарифмическая функция.** Многозначная функция  $w = \operatorname{Ln} z$  распадается на регулярные ветви во всякой односвязной области  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ , не содержащей точек  $0$  и  $\infty$ . Каждая регулярная ветвь  $f(z) \in \operatorname{Ln} z$  в такой области  $G$  является однолистной функцией (так как обратная к ней функция  $e^z$  является однозначной), поэтому эта ветвь  $f(z)$  осуществляет конформное

отображение области  $G$  на область  $f(G)$ , которое является обратным к отображению области  $f(G)$  на область  $G$  функцией  $w = e^z$ . Например, регулярная ветвь  $f(z)$  функции  $\operatorname{Ln} z$  кон-

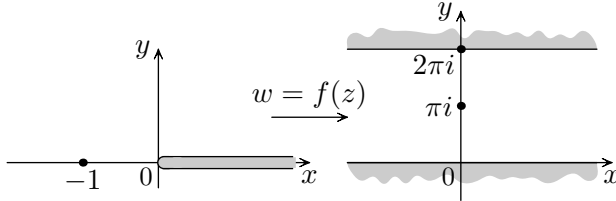


Рис. 8.8

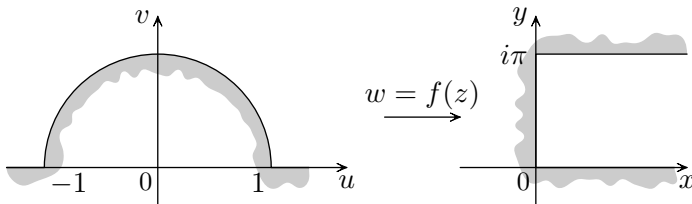


Рис. 8.9

формно отображает

- 1) плоскость  $\mathbb{C}$  с разрезом по лучу  $[0, +\infty)$  на полосу  $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$  (если  $f(-1) = \pi i$ ) (рис. 8.8);
- 2) область  $\{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$  на полуполосу  $\{w: 0 < \operatorname{Im} w < \pi, \operatorname{Re} w > 0\}$  (если  $f(2 + i0) = \ln 2$ ) (рис. 8.9).

**4. Функция Жуковского**  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  осуществляет конформное отображение области  $D \subset \overline{\mathbb{C}}$  тогда и только тогда, когда точки  $\pm 1$  не принадлежат области  $D$  и для любой точки  $z \in D$  точка  $\frac{1}{z} \notin D$ .

Например, функция Жуковского конформно отображает

- 1) верхнюю полуплоскость  $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$  на плоскость  $\mathbb{C}$  с разрезами по лучам  $(-\infty, -1]$  и  $[1, +\infty)$ , т. е. на  $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$  (рис. 8.10);
- 2) нижнюю полуплоскость  $\{z: \operatorname{Im} z < 0\}$  на  $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ ;

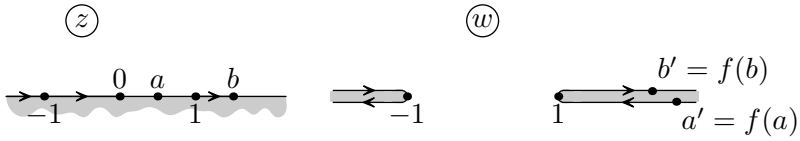


Рис. 8.10

- 3) единичный круг  $\{z: |z| < 1\}$  на плоскость  $\mathbb{C}$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$ , т. е. на  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  (рис. 8.11);

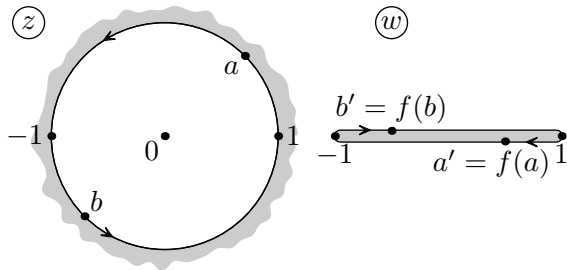


Рис. 8.11

- 4) внешность единичного круга (т. е.  $\{z: |z| > 1\}$ ) на  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  (рис. 8.12);

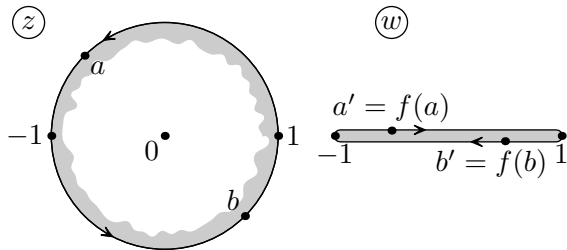


Рис. 8.12

- 5) область  $\{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$  на верхнюю полуплоскость  $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$  (рис. 8.13);
- 6) полукруг  $\{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$  на верхнюю полуплоскость  $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$  (рис. 8.14);

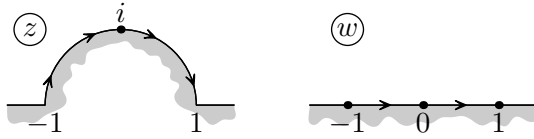


Рис. 8.13

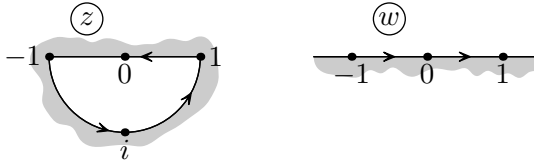


Рис. 8.14

7) область  $\{z: |z| > \rho > 1\}$  (и круг  $\{z: |z| < 1/\rho\}$ ) на внешность эллипса

$$\left\{ w = u + iv: \frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} > 1 \right\},$$

где  $a_\rho = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right)$ ,  $b_\rho = \frac{1}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right|$  (рис. 8.15);

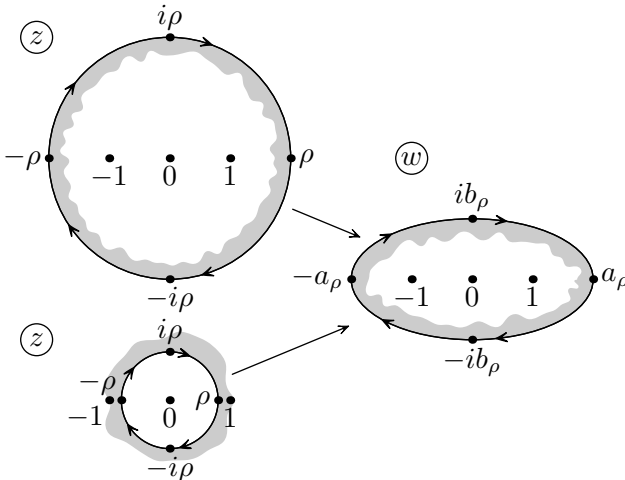


Рис. 8.15

8) угловую область  $\{z: \alpha < \arg z < \pi - \alpha\}$ , где  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , на внешность гиперболы  $\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1$  (рис. 8.16);

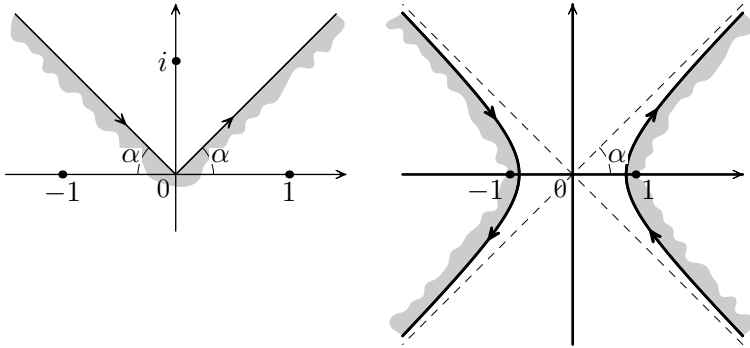


Рис. 8.16

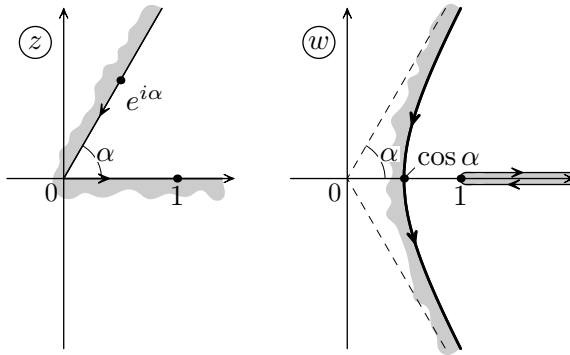


Рис. 8.17

- 9) угловую область  $\{z: 0 < \arg z < \alpha\}$ , где  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , на внутренность правой ветви гиперболы  $\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1$  с разрезом по лучу  $[1, +\infty)$  (рис. 8.17);
- 10) угловую область  $\{z: 0 < \arg z < \pi - \alpha, |z| > 1\}$ , (рис. 8.18) где  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , на область

$$\left\{ w = u + iv: \frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} > 1, u > 0, v > 0 \right\}.$$

### 5. Функция, обратная к функции Жуковского.

Многозначная функция  $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ , являющаяся обратной к функции Жуковского, в любой односвязной области  $G \subset \mathbb{C}$ , не содержащей хотя бы одной кривой, соединяющей

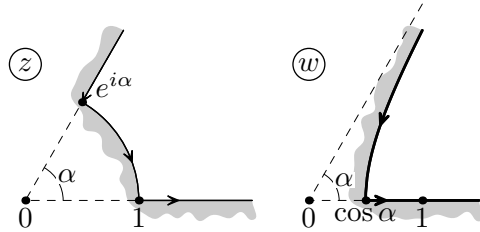


Рис. 8.18

точки  $z = \pm 1$ , распадается на две регулярные ветви. Всякая регулярная в области  $G$  ветвь функции  $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$  является однолистной (так как обратная к ней функция Жуковского является однозначной).

Например, регулярные ветви  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  обратной функции к функции Жуковского конформно отображают

- 1) плоскость с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$  на внешность единичного круга (если брать  $f_1(z)$  такую, что  $f_1(\infty) = \infty$ ) или на внутренность единичного круга (если брать  $f_2(z)$  такую, что  $f_2(\infty) = 0$ ) (рис. 8.19);
- 2) плоскость с разрезами по лучам  $(-\infty, -1]$  и  $[1, +\infty)$  на верхнюю полуплоскость (если брать  $f_1(z)$  такую, что  $f_1(0) = i$ ) или на нижнюю полуплоскость (если брать  $f_2(z)$  такую, что  $f_2(0) = -i$ ) (рис. 8.20);
- 3) верхнюю полуплоскость  $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $\{w: \operatorname{Im} w > 0, |w| > 1\}$  (если брать  $f_1(z)$  такую, что  $f_1(0 + i0) = i$ ) или на область  $\{w: |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$  (если брать  $f_2(z)$  такую, что  $f_2(0 + i0) = -i$ ) (рис. 8.21).

## 6. Тригонометрические и гиперболические функции.

Основные тригонометрические и гиперболические функции можно разложить в суперпозицию уже ранее рассмотренных элементарных функций.



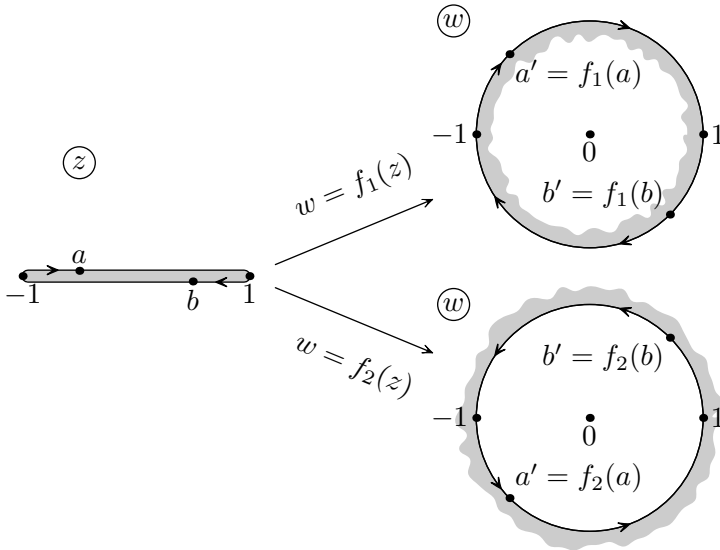


Рис. 8.19

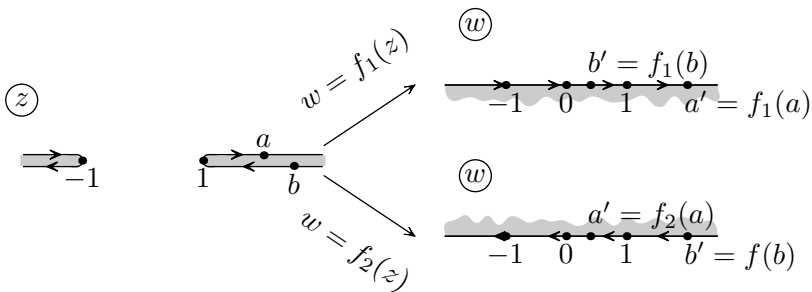


Рис. 8.20

Например, функция  $w(z) = \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$  является суперпозицией двух функций:

$$\zeta(z) = e^z, \quad w(\zeta) = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right).$$

Функция

$$w(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = (-i) \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

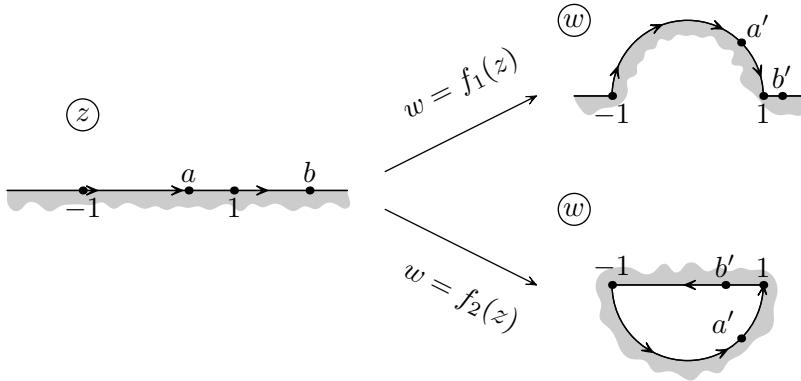


Рис. 8.21

является суперпозицией трех функций:

$$\zeta(z) = 2iz, \quad \eta(\zeta) = e^\zeta, \quad w(\eta) = (-i) \frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

### Примеры с решениями

**Пример.** Найти конформное отображение области  $D$ , являющейся верхней полуплоскостью  $\{z: \text{Im } z > 0\}$  с разрезом по отрезку  $[0, ih]$ , где  $h > 0$  (рис. 8.22), на верхнюю полуплоскость  $\{w: \text{Im } w > 0\}$ .

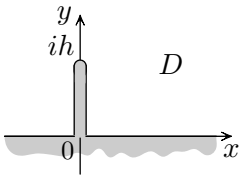


Рис. 8.22

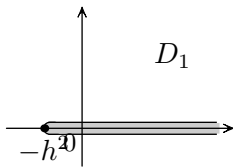


Рис. 8.23

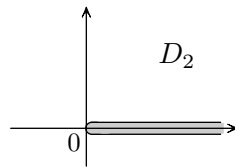


Рис. 8.24

#### Решение.

Функция  $\xi = f_1(z) = z^2$  однолистка на области  $D$  и конформно отображает область  $D$  на область  $D_1$ , являющуюся плоскостью с разрезом по лучу  $[-h^2, +\infty)$  (рис. 8.23).

Функция  $\eta = f_2(\xi) = \xi + h^2$  конформно отображает область  $D_1$  на область  $D_2$ , являющуюся плоскостью с разрезом по лучу  $[0, +\infty)$  (рис. 8.24).

Функция  $w = f_3(\eta) = \sqrt{|\eta|}e^{i \arg \eta/2}$ , где  $\arg \eta \in (0, 2\pi)$ , конформно отображает область  $D_2$  на верхнюю полуплоскость  $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

Итак, функция  $w = f_3(f_2(f_1(z)))$  конформно отображает область  $D$  на область  $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ .

**Пример.** Найти конформное отображение области  $D$ , являющейся верхней полуплоскостью  $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$  с разрезом по дуге окружности  $\{z: |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \alpha\}$ , где  $0 < \alpha < \pi$  (рис. 8.25), на верхнюю полуплоскость.

**Решение.**

Функция Жуковского  $\xi = f_1(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  отображает область  $D$  на плоскость с разрезами по лучам  $(-\infty, -1]$  и  $[\cos \alpha, +\infty)$  (область  $D_1$ ) (рис. 8.26).

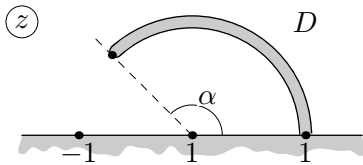


Рис. 8.25

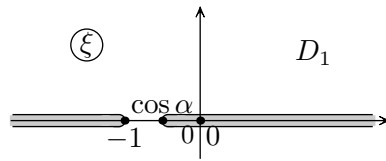


Рис. 8.26

Дробно-линейная функция  $\eta = f_2(\xi) = \frac{\xi - \cos \alpha}{\xi + 1}$  отображает область  $D_1$  на область  $D_2$ , являющуюся плоскостью с разрезом по лучу  $[0, +\infty)$  (рис. 8.24).

Функция  $w = f_3(\eta) = \sqrt{|\eta|}e^{i \arg \eta/2}$ , где  $\arg \eta \in (0, 2\pi)$ , конформно отображает область  $D_2$  на верхнюю полуплоскость  $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ .

Итак, функция  $w = f_3(f_2(f_1(z)))$  является искомой.

**Пример.** Область  $D = \{z: \operatorname{Re} z > 0, |z - 1| > 1\} \setminus [2, 3]$  (рис. 8.27) конформно отобразить на верхнюю полуплоскость.

**Решение.**

Функция  $\xi = f_1(z) = \frac{1}{z}$  отображает область  $D$  на область

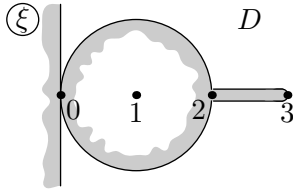


Рис. 8.27

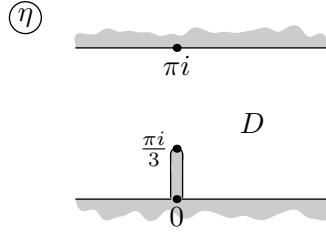


Рис. 8.28

$D_1$ , являющуюся полосой с разрезом, т. е.

$$D_1 = \left\{ \xi : 0 < \operatorname{Re} \xi < \frac{1}{2} \right\} \setminus \left[ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right].$$

Линейная функция  $\eta = f_2(\xi) = \pi i(1 - 2\xi)$  отображает область  $D_1$  на область

$$D_2 = \{ \eta : 0 < \operatorname{Im} \eta < \pi \} \setminus \left[ 0, \frac{\pi}{3} i \right]$$

(рис. 8.28). Функция  $w = f_3(\eta) = e^\eta$  отображает область  $D_2$  на область (рис. 8.25) при  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Далее см. пример 2.

**Пример.** Найти конформное отображение области  $D$  (рис. 8.29), являющейся полуполосой  $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$  с разрезом по отрезку  $\left[ \frac{\pi i}{2}; \frac{\pi i}{2} + 1 \right]$  на верхнюю полуплоскость.

**Решение.**

Функция  $\xi = f_1(z) = e^z$  отображает область  $D$  на область  $D_1$  (рис. 8.30), являющуюся верхней полуплоскостью с выброшенным единичным полукругом и разрезом  $[i, ei]$ . Функция  $\eta = f_2(\xi) = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right)$  отображает область  $D_1$  на верхнюю полуплоскость с разрезом  $[0, i \operatorname{sh} 1]$  (рис. 8.22) при  $h = \operatorname{sh} 1$ . Далее воспользоваться решением примера 1.

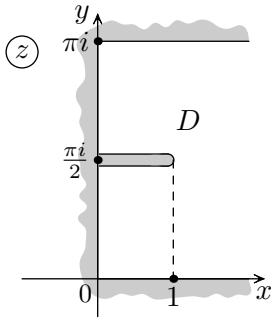


Рис. 8.29

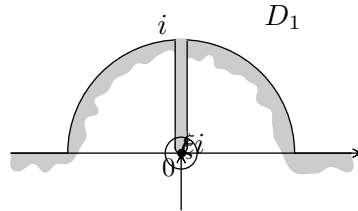


Рис. 8.30

## § 9. Задачи

### Задачи семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)

1. Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - i)$  функцию

$$f(z) = \frac{2i + 1}{(z - i - 1)(z + i)}$$

в кольце, которому принадлежит точка  $z = \frac{i}{2}$ . Указать границы кольца сходимости.

2. Исследовать все особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

3. Вычислить  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2-3x)}{x^2+4} dx$ .

4. Вычислить  $\oint_{|z+i|=2} \frac{z-1}{z(\cos \frac{1}{z}-1)} dz$ .

5. Вычислить  $\int_{-2}^1 \sqrt[10]{(x+2)^5(1-x)^5} dx$ .

6. Пусть  $f(z)$  — регулярная ветвь функции  $\text{Ln}(z^2 - 4z)$  в плоскости с разрезом  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ,  $\gamma_1 = \{|z - 2| = 2, \text{Im } z \leq 0\}$ ,  $\gamma_2 = \{-\text{Re } z = \text{Im } z, \text{Im } z \geq 0\}$ , причем  $\text{Im } f(-5) = 0$ . Вычис-