Занятия 9, 10. Конформные отображения с помощью элементарных функций

Для нахождения образа какого-нибудь множество E (линии, области), заданного на комплексной плоскости z с помощью некоторых условий A (уравнений, неравенств), при отображении $w = f(z)$ поступают следующим образом. Из условий A и равенства $w = f(z)$, где $z = x + iy = re^{i\varphi}$, $w = u + iv = \rho e^{i\Theta}$, исключая x, y или r, φ, получают новые условия через u, v или ρ, Θ. Эти условия описывают некоторое множество на плоскости w, которое и будет образом множества E при отображении $w = f(z)$.

Конформные отображения многих областей друг на друга осуществляются с помощью элементарных функций. Часто применяются следующие функции.

1. $w = z + b, \quad b \in C$ - параллельный перенос на вектор b.

2. $w = \alpha z, \quad \alpha \in R_+$ - преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом подобия α.

3. $w = ze^{i\varphi}, \quad \varphi \in R$ - поворот вокруг начала координат на угол φ.

4. $w = z^{\alpha}, \ \alpha \in R_{+}$ - степенная функция.

$$0 < \arg z < \varphi, \ \ \varphi \le \frac{2\pi}{\alpha},$$

Отображает угол

конформно на угол $0 < \arg w < \alpha\varphi$ (рис. 11). При этом сектор I переходит в сектор I', область II – в область II', а дуга окружности $|z| = c$ - в дугу окружности $|w| = c^{\alpha}$.

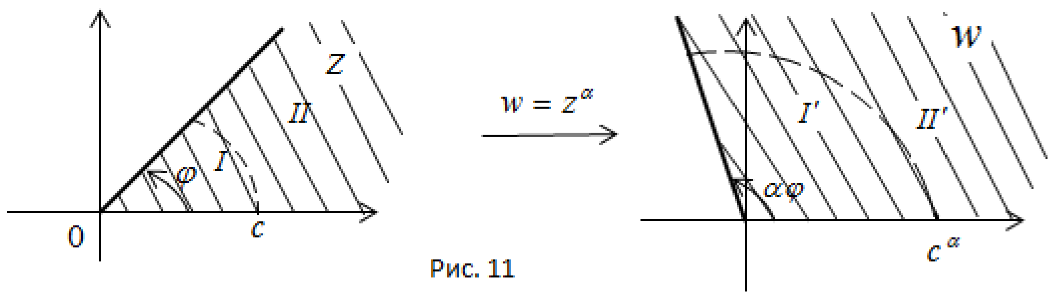


Рис. 11

В дальнейшем в случае многозначности функции $w = z^{\alpha}$ (это будет, когда α - нецелое число) под $w = z^{\alpha}$ будем понимать ту однозначную ветвь, которая в точке z = 1 принимает значение $w = 1$.

5. $w = e^z$ - показательная функция. Отображает полосу $0 < \operatorname{Im} z < \alpha, \quad \alpha \le 2\pi$, конформно на угол $0 < \arg w < \alpha$ (рис.12). При этом полуполоса I переходит в сектор I', а полуполоса II - в область II'.

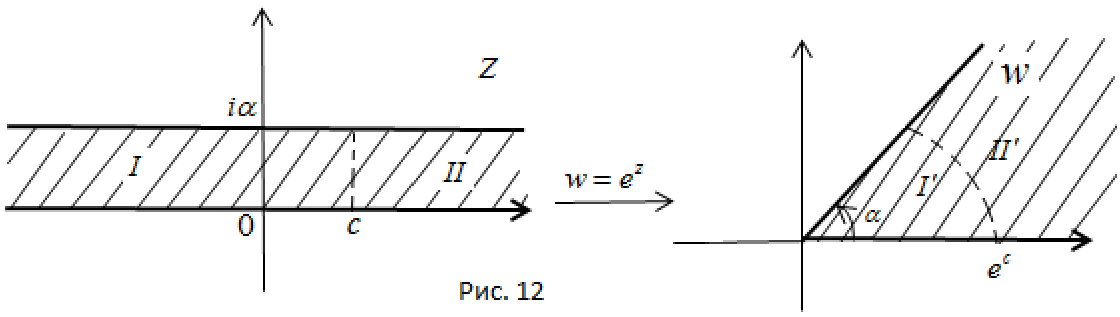


Рис. 12

6. $$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$ - функция Жуковского.

Отображает единичный круг $|z| < 1$, а также внешность единичного круга конформно на плоскость с разрезом по отрезку [-1; 1] (рис. 13). При этом области I

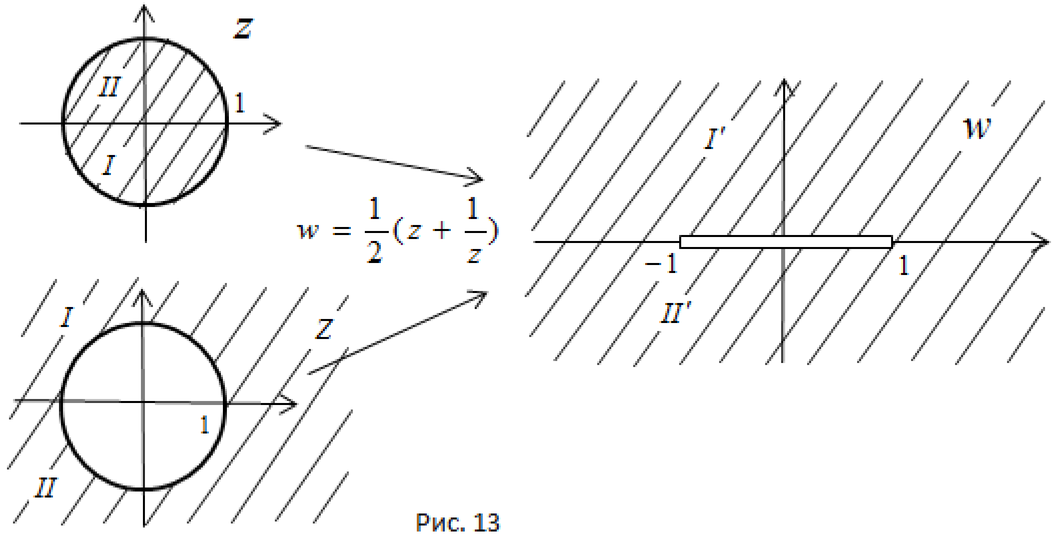


Рис. 13

(нижний полукруг и верхняя полуплоскость с выкинутым полукругом) переходят в верхнюю полуплоскость I', а области II (верхний по-лукруг и нижняя полуплоскость с выкинутым полукругом) переходят в нижнюю полуплоскость II'.

7. $$w = \frac{az+b}{cz+d}$$ - дробно-линейная функция. Ее основные свойства приведены в теоретической части занятий 7, 8.

На практике часто встречаются области следующих типов, которые бывает надо отобразить конформно на верхнюю полуплоскость.

1. Области, границы которых имеют две угловые точки (рис. 14).

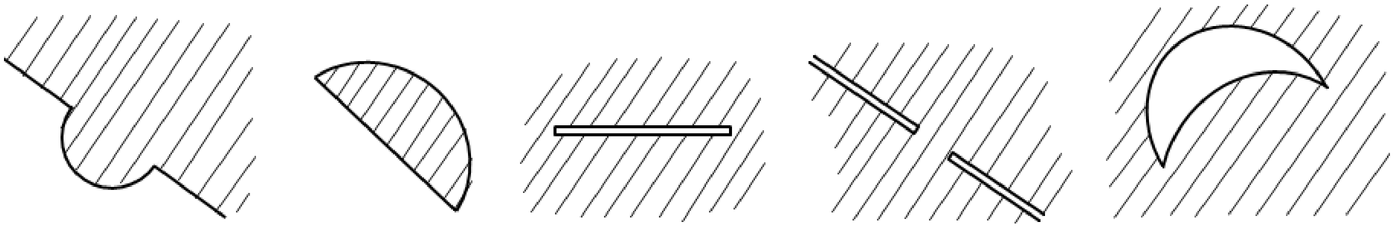


Рис. 14

Используя какую-нибудь дробно-линейную функцию, отобразить

одну из угловых точек в 0, а другую в ∞, после чего получится угол с вершиной в начале координат. Далее осуществить поворот и применить степенную функцию.

2. Круг, внешность круга или полукруг с разрезом (рис. 15).

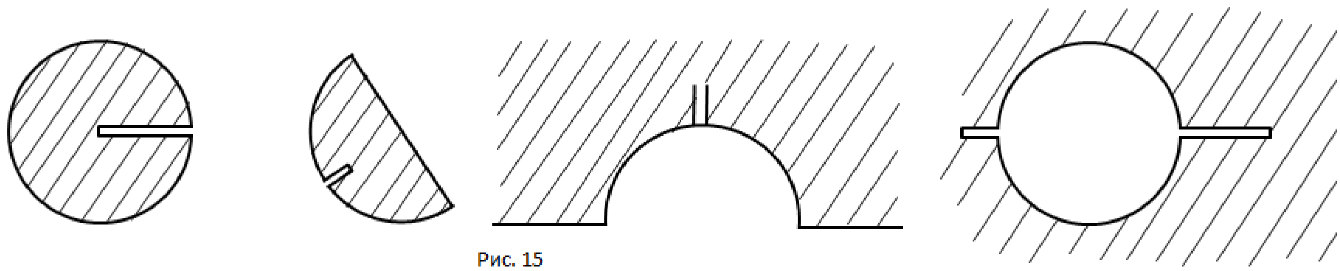


Рис. 15

Применить преобразование подобия и функцию Жуковского, после чего получится плоскость или полуплоскость с разрезами.

3. Области, ограниченные окружностями (прямыми) или дугами окружностей, которые имеют точку касания (рис. 16).

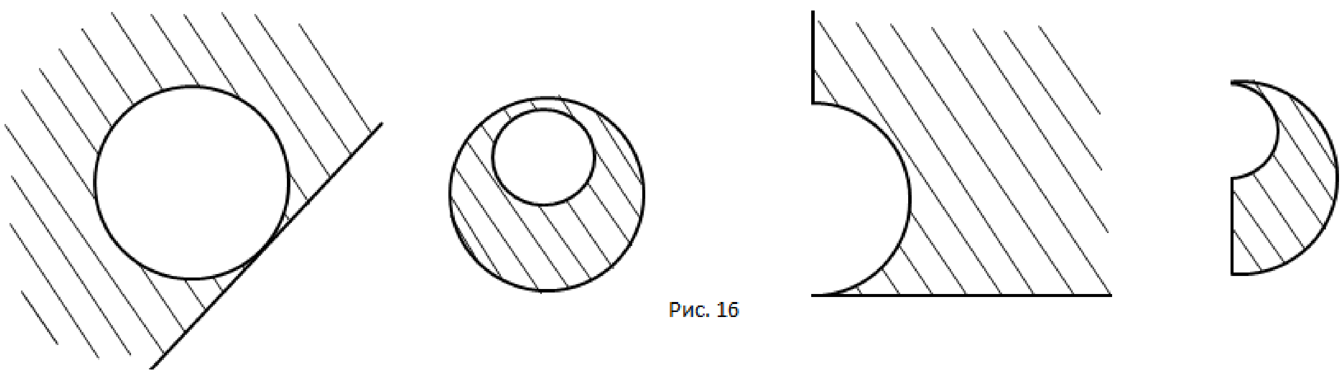


Рис. 16

Используя дробно-линейную функцию, отобразить точку касания в ∞, после чего получится полоса или полуполоса. Далее применить показательную функцию.

4. Области, границы которых имеют три и более угловых точек (рис .17).

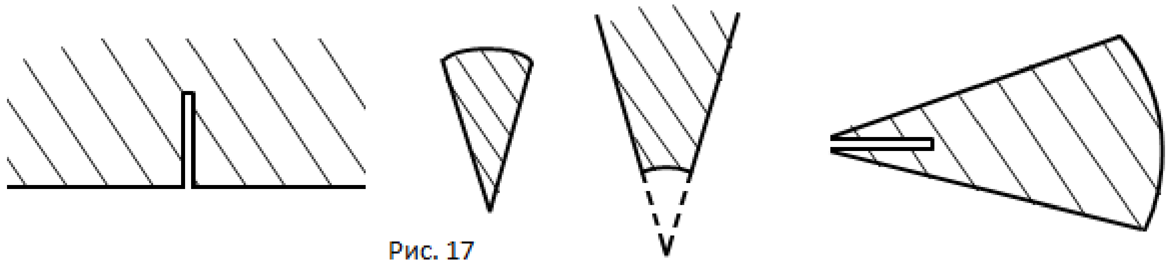


Рис. 17

Используя степенную функцию, выпрямить некоторые из углов.

Задачи

1. Найти образ прямой $\mathrm{Re}\, z = a, \quad a \neq 0$ при отображении $w = z^2$.

Решение. Пусть $z = x + iy, \quad w = u + iv.$ Тогда из условия Re z = a и равенства $w = z^2$, т.е. равенства $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ имеем x = a , $x^2 - y^2 = u,\ 2xy = v,$ откуда, исключая x и y, получим $u = a^2 - \dfrac{v^2}{4a^2}$. Следовательно, образом прямой Re z = a будет парабола

$$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$$

.

2. Найти образы прямых $y = ax + b, \ x + iy = z$

при отображении $w = e^z$.

Решение. Считая $w = \rho e^{i\Theta}$, из равенства

$$\rho e^{i\Theta} = w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

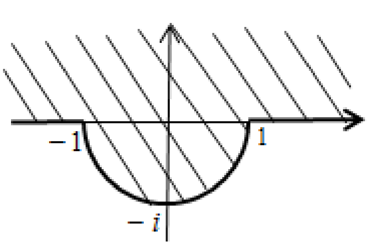
находим: $\rho = e^x, \ \theta = y$. Присоединяя к этим равенствам условие $y = ax + b$ и исключая из полученных равенств x и y, получим $\theta = a \ln \rho + b$.
Это уравнение описывает логарифмическую спираль при $a \neq 0$ и луч $\theta = в$ при a = 0.

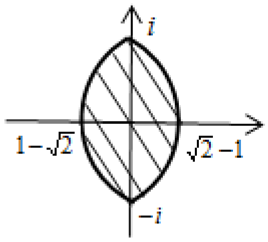
3. Найти образ верхней полуплоскости с разрезом по отрезку $[0; ih]$, $h > 0$, при отображении $w = z^2$.

Решение. Функция $w = z^2$ отображает верхнюю полуплоскость, рассматриваемую как угол $0 < \arg z < \pi$, на угол $0 < \arg w < 2\pi$, т.е. на плоскость с разрезом по действительной положительной полуоси $[0; +\infty)$. Из этой области надо выкинуть еще образ отрезка $[0; ih]$ при отображении $w = z^2$. Отрезок $[0; ih]$ задается условиями x = 0, $0 \leq y \leq h$. Из этих условий и равенств $x^2 - y^2 = u,\ 2xy = v,$ полу-чаемых из равенства $w = z^2$, исключая x и y, получим: $v = 0,\quad -h^2 \leq u \leq 0$. Значит, образом отрезка $[0; ih]$ будет отрезок $[-h^2; 0]$, а образом исходной области будет плоскость с разрезом по лучу $[-h^2; +\infty)$.

4. Найти какие-нибудь конформные отображения $w = w(z)$ на верхнюю полуплоскость Im z > 0 следующих областей:

а) б)





в) плоскость с разрезом по лучам $(-\infty;0]$ и $[1;+\infty)$;

г) верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку $[0;ih], h>0$;

д) внешность единичного круга с центром в точке 0 и с разрезом по лучу $(-\infty;-1]$;

е) верхнюю половину единичного круга с разрезом по отрезку $\left[\frac{i}{2};i\right]$;

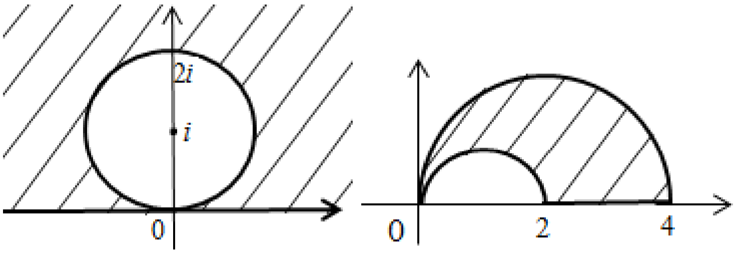
ж) сектор $|z|<2, \quad 0<\arg z<\frac{\pi}{3}$;

з) полуполосу

$$\operatorname{Im} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Re} z < h, \quad h > 0$$

;

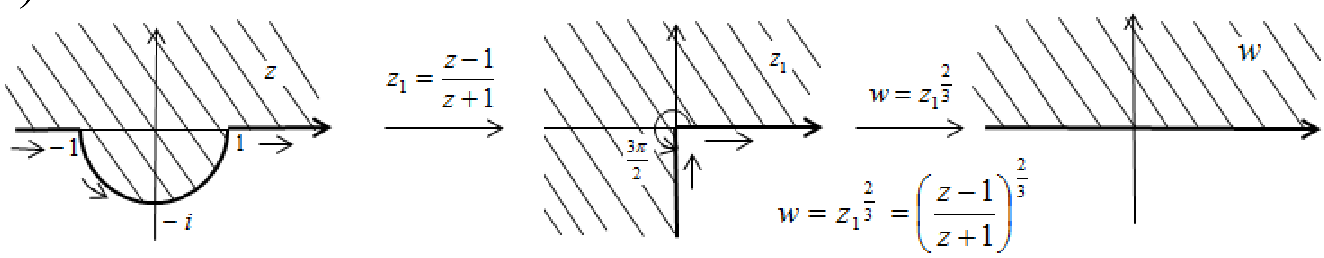
и) к)



л) полосу $|\operatorname{Im} z| = \pi$ с разрезом по лучу $[0;+\infty)$.

Решение. Последовательности отображений, с помощью которых осуществляются конформные отображения заданных областей на верхнюю полуплоскость, а также области, получаемые при этих отображениях, указаны на следующих рисунках.

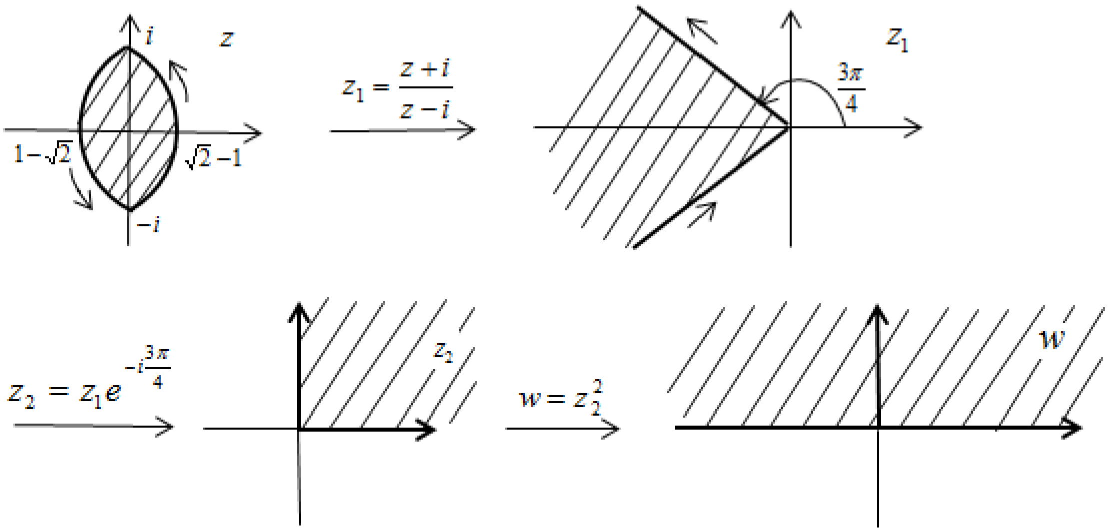
а)



Границы заданной области имеет две угловые точки -1 и 1, которые с помощью функции z_1 отображаются соответственно в ∞ и 0. Точка $z = \infty$ угловой точкой границы не является, так как на бесконечности лучи $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$, рассматриваемые как единая часть прямой $\operatorname{Im} z = 0$, угол не образуют. Функция z_1

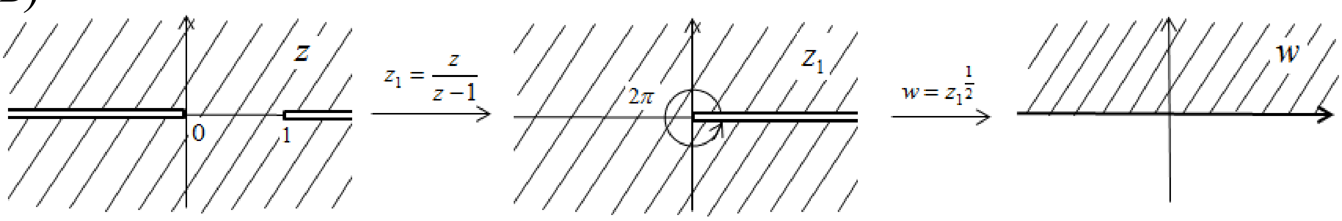
отображает заданную область на угол величины $\frac{3\pi}{2}$ с вершиной в начале координат, который с помощью степенной функции $w = z_1^{\frac{2}{3}}$ отображается на угол величины π, т.е. на верхнюю полуплоскость.

б)



$$w = z_2^2 = \left(z_1 e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = z_1^2 e^{-i\frac{3\pi}{2}} = iz_1^2 = i\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2.$$

в)

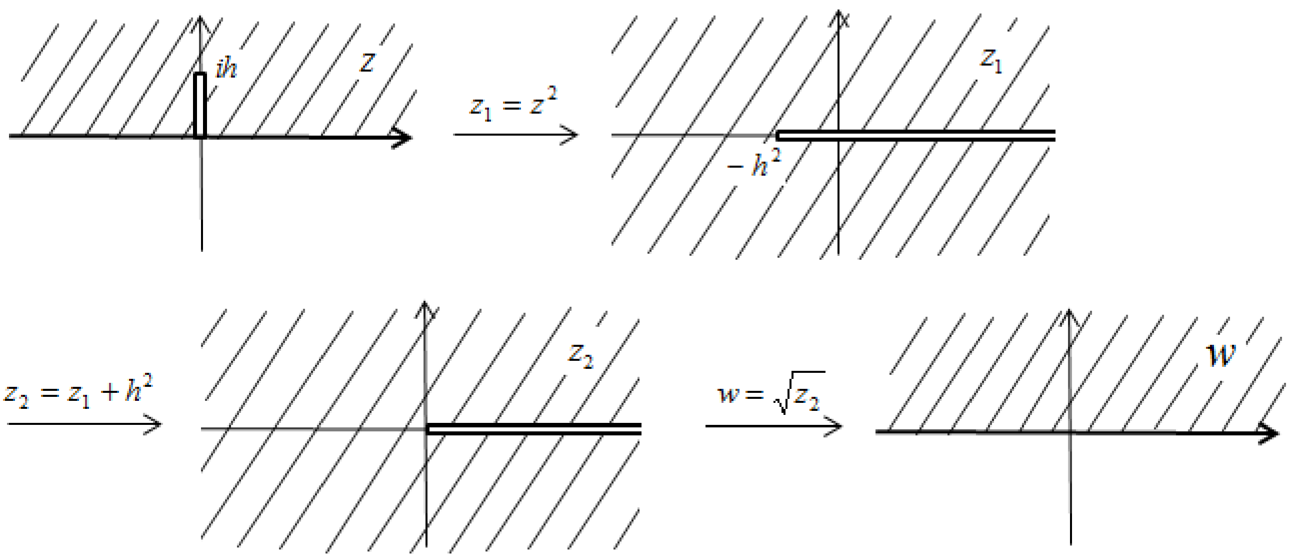


$$w = z_1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{z}{z-1}}$$

.

Так как при отображении z_1 лучи $(-\infty;0]$ и $[1;+\infty)$ в совокуп-ности переходят в один луч $[0;+\infty)$, то образом заданной области при отображении z_1 будет вся плоскость с разрезом по лучу $[0;+\infty)$, т.е. угол величины 2π с вершиной в начале координат, который с по-мощью функции $w = z_1^{\frac{1}{2}}$ отображается на верхнюю полуплоскость.

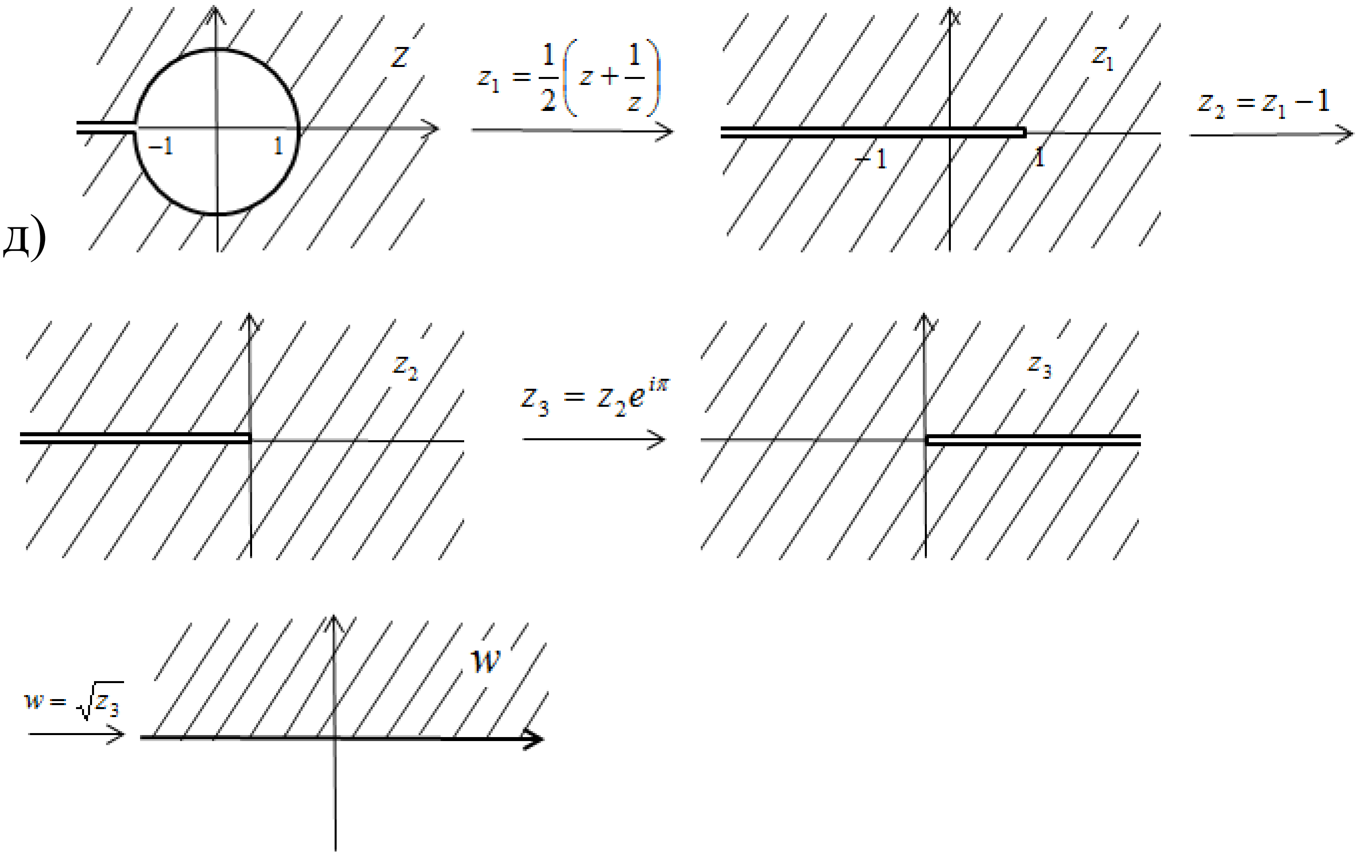
г)



$$w = \sqrt{z_2} = \sqrt{z_1 + h^2} = \sqrt{z^2 + h^2}$$

.

д)

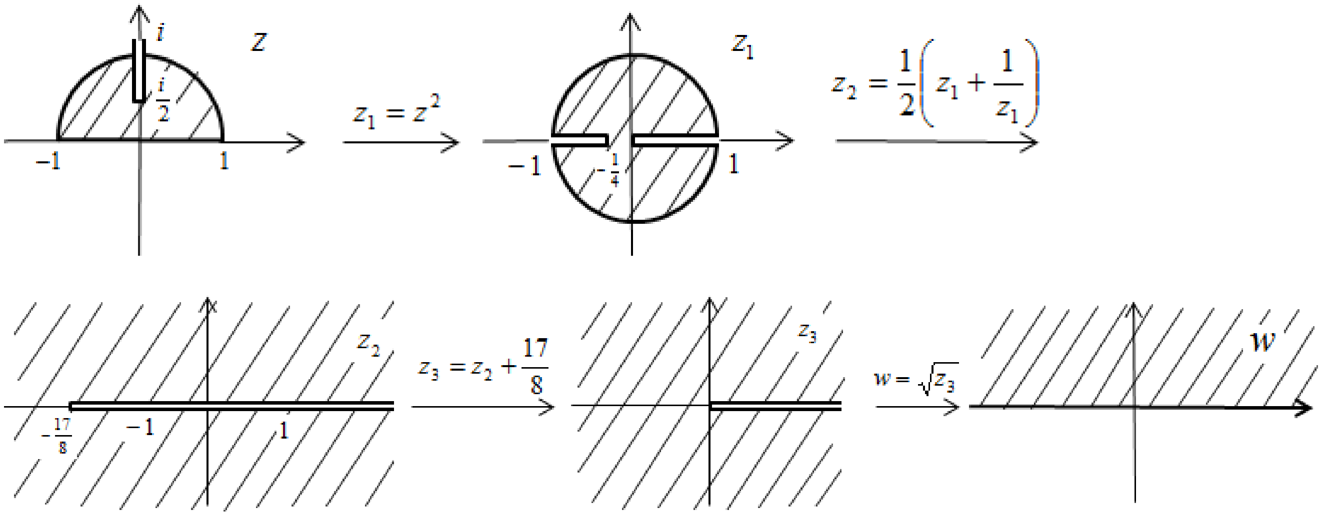


$$w=\sqrt{z_3}=\sqrt{z_2e^{i\pi}}=\sqrt{z_2e^{i\frac{\pi}{2}}}=i\sqrt{z_2}=i\sqrt{z_1-1}=i\sqrt{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}=\frac{i(z-1)}{\sqrt{2z}}$$

.

Функция Жуковского z_1 отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1;1]$, а разрез по лучу $(-\infty;-1]$ на луч $(-\infty;-1]$. Поэтому образом исходной области при отображении z_1 будет внешность отрезка $[-1;1]$, откуда выкидывается еще луч $(-\infty;-1]$, т.е. будет плоскость с разрезом по лучу $(-\infty;-1]$.

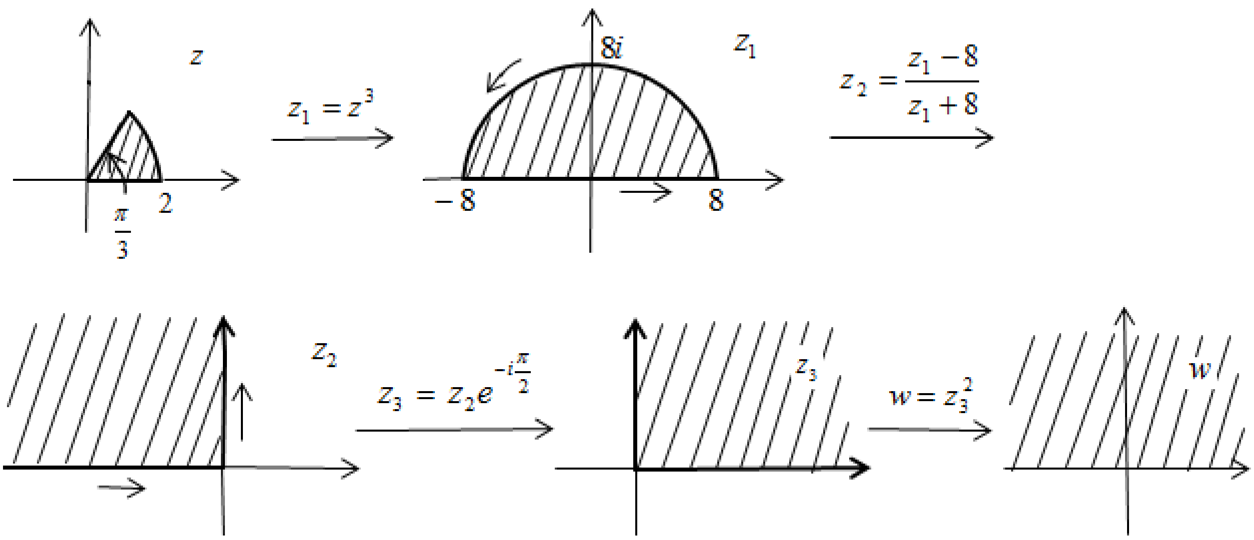
е)



$$w=\sqrt{z_3}=\sqrt{z_2+\frac{17}{8}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)+\frac{17}{8}}=\frac{\sqrt{4z^4+17z^2+4}}{\sqrt{8}z}.$$

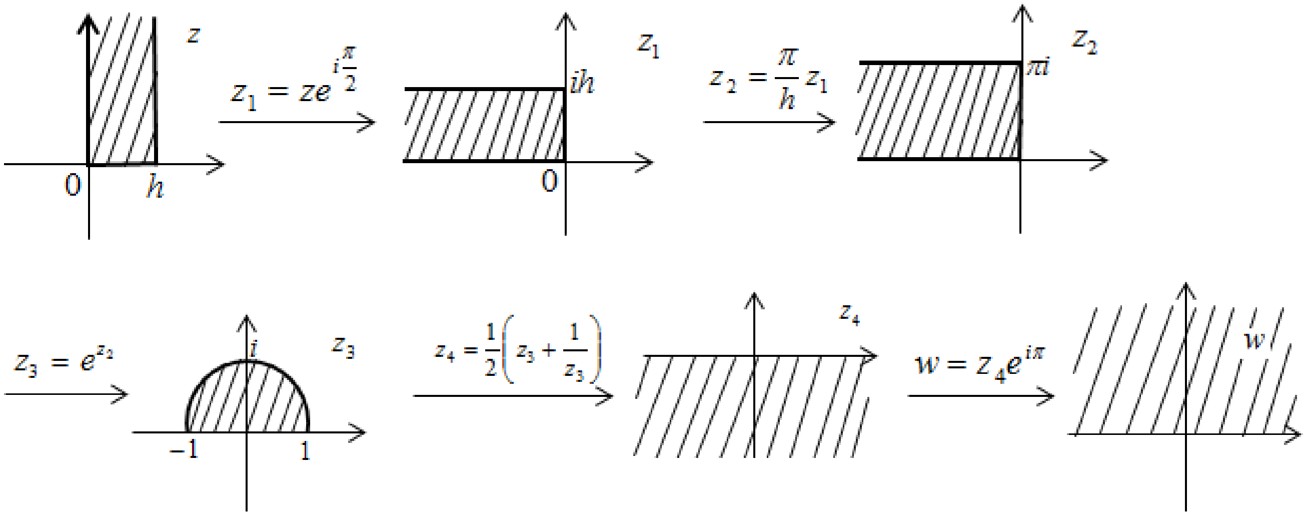
Преобразование $z_1 = z^2$ отображает единичный верхний полукруг на единичный круг с разрезом по отрезку $[0;1]$, а отрезок $\left[\frac{i}{2};i\right]$ на отрезок $\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$, поэтому образом исходной области при отображении z_1 будет единичный круг с разрезами по отрезкам $\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$ и $[0;1]$. Полученная область отображается функцией Жуковского z_2 на плоскость с разрезом по лучу $\left[-\frac{17}{8};+\infty\right]$, так как при этом отображении единичный круг переходит во внешность отрезка $[-1;1]$, отрезок $\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$ на отрезок $\left[-\frac{17}{8};-1\right]$, а отрезок $[0;1]$ на луч $[1;+\infty)$.

ж)

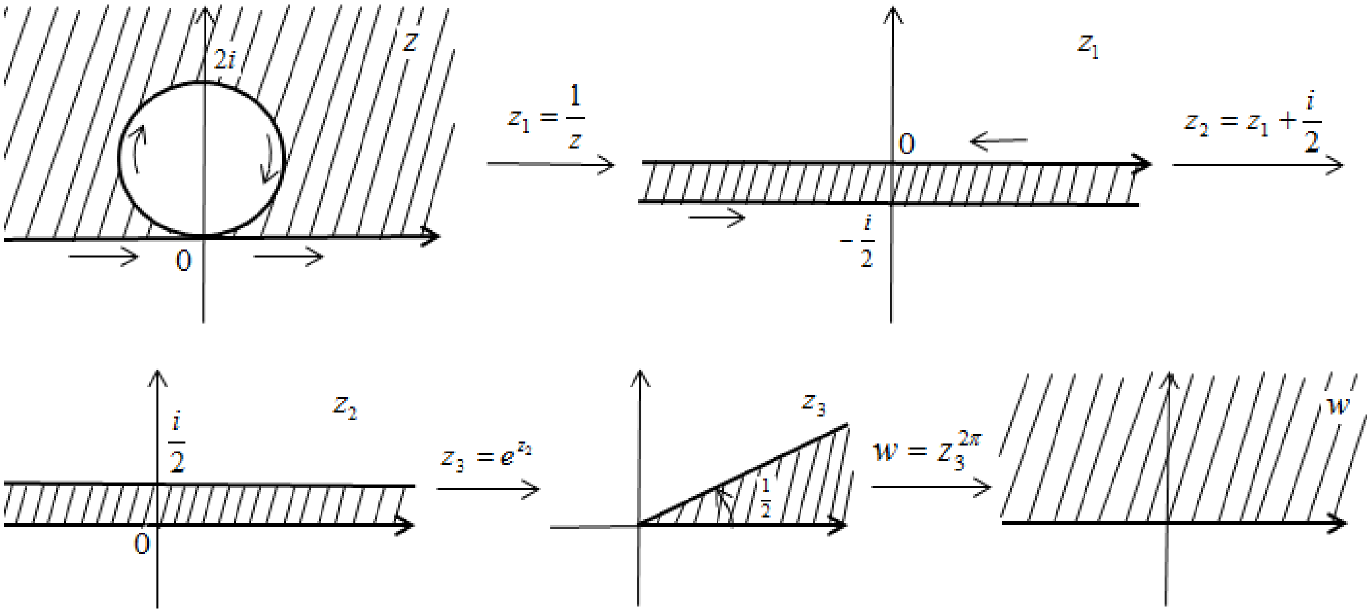


$$w=z_3^2=(z_2e^{-i\frac{\pi}{2}})^2=-z_2^2=-\left(\frac{z^3-8}{z^3+8}\right)^2.$$

з)



и)

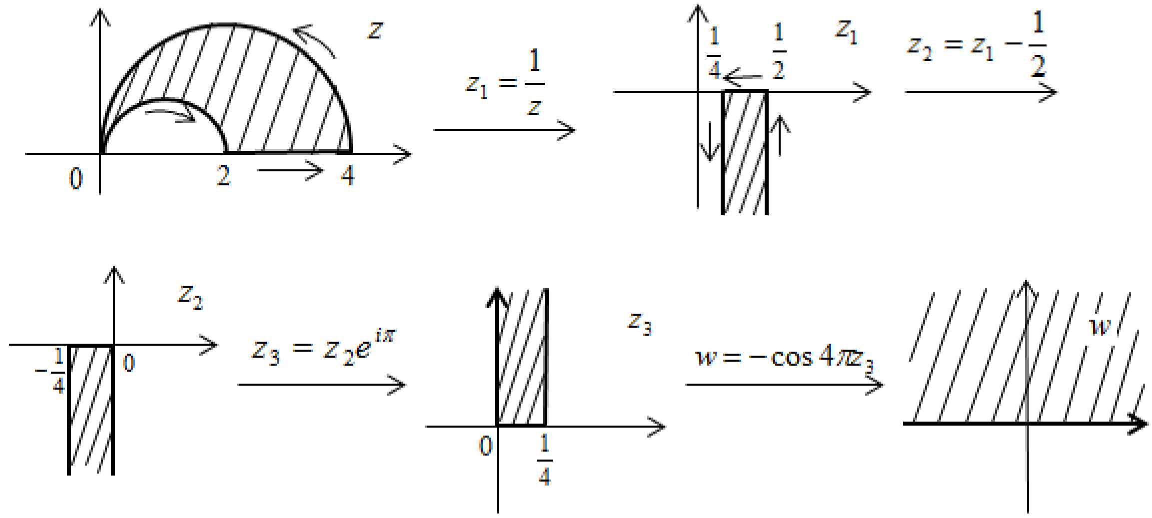


$$w = z_3^{2\pi} = e^{2\pi z_2} = e^{2\pi\left(\frac{1}{z} + \frac{i}{2}\right)} = -e^{\frac{2\pi}{z}}$$

.

Граница исходной области имеет точку касания z = 0, которая с помощью функции $z_1 = \frac{1}{z}$ отображается в ∞. При этом сама область переходит в полосу.

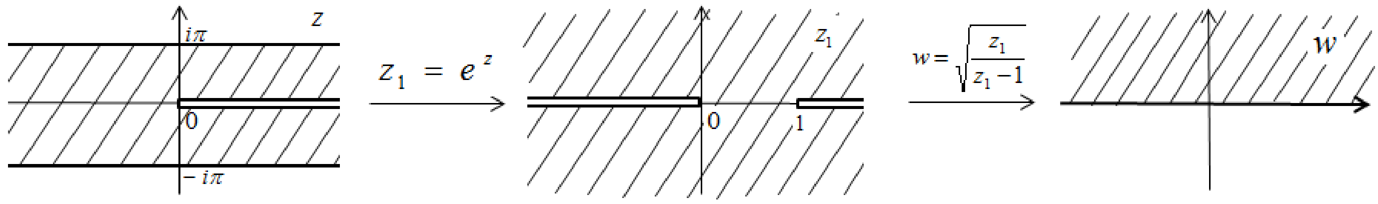
к)



Для отображения полуполосы, изображенной на плоскости z_3, на верхнюю полуплоскость воспользовались ответом примера з), где брали $h = \frac{1}{4}$. Тогда

$$w = -\cos\left(\frac{4\pi}{z}\right).$$

л)



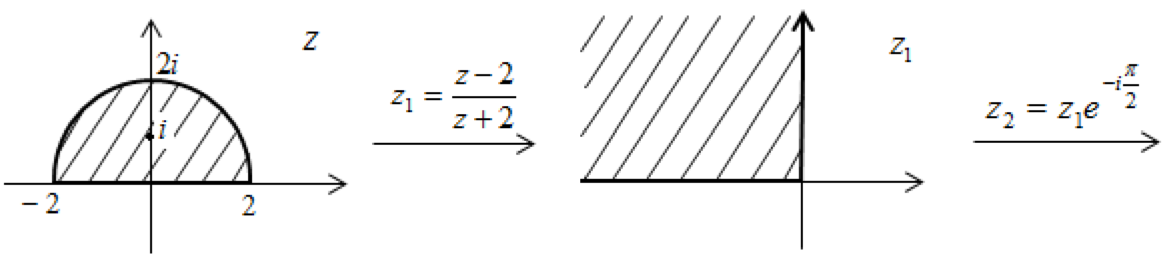
$$w = \sqrt{\frac{e^z}{e^z - 1}}.$$

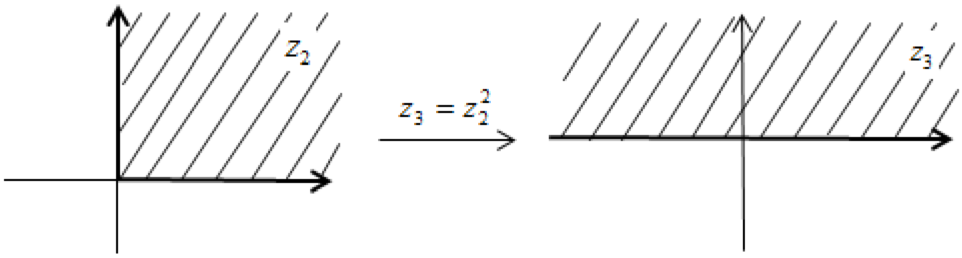
При отображении $z_1 = e^z$ полоса $|\operatorname{Im} z| < \pi$ переходит в угол $-\pi < \arg z_1 < \pi$, т.е. в плоскость с разрезом по лучу $(-\infty;0]$, а разрез $[0;+\infty)$ переходит в луч $[1;+\infty)$, поэтому исходная область переходит в плоскость с разрезами по лучам $(-\infty;0]$ и $[1;+\infty)$. Далее воспользовались ответом примера в).

5. Отобразить полукруг $|z| < 2, \quad \operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы $w(i) = 0, \quad w(2i) = 1$.

Решение. Сначала найдем какое-нибудь конформное отображение заданного полукруга на верхнюю полуплоскость. Одно из таких отображений дается последовательностью конформных отображений, указанных на следующих рисунках.

Загрузка...





Функция

$$z_3 = z_2^2 = \left(z_1 e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -\left(\frac{z-2}{z+2}\right)^2$$

отображает заданный полукруг конформно на верхнюю полуплоскость. При этом внутренняя точка i перейдет в точку $\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$, а граничная точка 2 i в точку 1.

Отобразим теперь полуплоскость $\operatorname{Im} z_3 > 0$ на круг $|w|<1$ так, чтобы точка $\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$ перешла в точку 0, а точка 1 в точку 1. Так как искомое отображение является дробно- линейным, то при этом согласно свойству симметрии дробно-линейной функции точка $\frac{7}{25}-i\frac{24}{25}$, симметричная точке $\frac{7}{25}+i\frac{24}{25}$ относительно границы полуплоскости $\operatorname{Im} z_3 > 0$, перейдет в точку ∞, симметричную точке 0 относительно границы круга $|w|<1$. Следовательно, искомое отображение переводит точки $\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$, $\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i$, 1 соответственно в точки 0, ∞, 1. Оно находится из соотношения

$$\frac{w}{w-\infty}\cdot\frac{1-\infty}{1-0}=\frac{z_3-(7+24i)/25}{z_3-(7-24i)/25}\cdot\frac{1-(7-24i)/25}{1-(7+24i)/25},$$

откуда

$$w=\frac{-7+24i}{25}\cdot\frac{25z_3-7-24i}{25z_3-7+24i},$$

где $z_3=-\left(\frac{z-2}{z+2}\right)^2$. Эта функция отображает заданный полукруг на единичный круг так, что

$$w(i)=0,\quad w(2i)=1$$