Раздел II. Математический анализ

Е. Ю. Анохина

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ И СТАНОВЛЕНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (ТФКП) УЧЕБНЫМ ПРЕДМЕТОМ

Одним из сложных математических курсов является курс ТФКП. Сложность этого курса обусловлена, прежде всего, разнообразием его взаимосвязей с другими математическими дисциплинами, исторически выраженной в широкой прикладной направленности науки ТФКП.

В научной литературе по истории математики существуют разрозненные сведения об истории развития ТФКП, они требуют систематизации и обобщения.

В связи с этим основной задачей данной статьи является краткое описание развития ТФКП и становление этой теории учебным предметом.

В результате проведенного исследования были выделены следующие три этапа развития ТФКП как науки и учебного предмета:

- этап возникновения и признания комплексных чисел;
- этап накопления фактического материала по функциям мнимых величин;
- этап становления теории функций комплексного переменного.

Первый этап развития ТФКП (сер. XVI в. – XVIII в.) начинается с работы Дж. Кардано (1545) который опубликовал работу «Artis magnae sive de regulis algebraicis» (Великое искусство, или об алгебраических правилах). Сочинение Дж. Кардано имело основной задачей обоснование общих алгебраических приемов решений уравнений третьей и четвертой степеней, незадолго до этого открытых Ферро (1465–1526), Тарталья (1506–1559) и Феррари (1522–1565).

Если кубическое уравнение приведено к виду

$$x^3 + px + q = 0,$$

то

$$x = u + v,$$

где

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

причем должно быть

$$uv = -\frac{p}{3}.$$

Когда $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, то уравнение имеет три действительных корня, причем два из них равны между собой. Если $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, тогда уравнение имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня. Комплексные числа появляются в окончательном результате, поэтому Дж. Кардано мог поступить так, как поступали и до него: объявить уравнение имеющим один корень. Когда $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, тогда уравнение имеет три действительных корня. Этот так называемый неприводимый случай характеризуется одной особенностью, с которой до XVI века не встречались. Уравнение $x^3 - 21x + 20 = 0$ имеет три действительных корня 1, 4, – 5 в чем легко убедиться простой подстановкой. Но $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{20}{2}\right)^2+\left(\frac{-21}{3}\right)^3=-243<0$; следовательно, согласно общей формуле, $x=\sqrt[3]{-10+\sqrt{-243}}-\sqrt[3]{-10-\sqrt{-243}}$. Комплексное, т.е. «ложное», число оказывается здесь не результатом, а промежуточным членом в вычислениях, которые приводят к действительным корням рассматриваемого уравнения. Дж. Кардано столкнулся с трудностью и понял, что для сохранения общности этой формулы надо отказаться от полного игнорирования комплексных чисел. Ж. Даламбер (1717–1783) считал, что именно это обстоятельство заставило Дж. Кардано и следующих этой идеи математиков серьезно заинтересоваться комплексными числами.

На этом этапе (в XVII в.) были общепринятыми две точки зрения. Первая точка зрения была высказана Жираром, который поднял вопрос о признании необходимости ничем неограниченного использования комплексных чисел. Вторая – Декартом, который отрицал возможность интерпретации комплексных чисел. Противоположной мнению Декарта была точка зрения Дж. Валлиса – о существовании реального истолкования комплексных чисел была проигнорирована Декартом. Комплексные числа начали «вынужденно» использовать при решении прикладных задач в ситуациях, где использование действительных чисел приводили к сложному результату, либо результат не мог получиться теоретически, но имел практическую реализацию.

Интуитивное использование комплексных чисел приводило к необходимости сохранения законов и правил арифметики действительных чисел на множество комплексных чисел, в частности были попытки прямого переноса. Это приводило порой к ошибочным результатам. В связи с этим актуальными стали вопросы об обосновании комплексных чисел и построении алгоритмов их арифметики. Это явилось началом нового этапа развития ТФКП.

Второй этап развития ТФКП (начало XVIII в. – XIX в.). В XVIII в. Л. Эйлер высказал мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел C привела математиков к выводам:

– что изучение функций и математический анализ вообще приобретают должную полноту и законченность только при рассмотрении поведения функций в комплексной области;

– необходимо рассмотрение комплексных чисел в качестве переменных величин.

В 1748 г. Л. Эйлер (1707–1783) в своей работе «Введение в анализ бесконечно малых» ввел комплексную переменную в качестве наиболее общего понятия переменной величины, использовав комплексные числа при разложении функций на линейные сомножители. Л. Эйлер по праву считается одним из творцов ТФКП. В работах Л. Эйлера детально изучены элементарные функции комплексного переменного (1740–1749), даны условия дифференцируемости (1755) и начала интегрального исчисления функций комплексного переменного (1777). Л. Эйлер практически ввел конформное отображение (1777). Он называл эти отображения «подобными в малом», а термин «конформный» был впервые употреблен, по-видимому, петербургским академиком Ф. Шубертом (1789). Л. Эйлер привел также многочисленные приложения функций комплексного переменного к различным математическим задачам и положил начало применению их в гидродинамике (1755–1757) и картографии (1777). К. Гаусс формулирует определение интеграла в комплексной плоскости, интегральную теорему о разложимости аналитической функции в степенной ряд. Лаплас использует комплексные переменные при вычислении трудных интегралов и развивает метод решения линейных уравнений, разностных и дифференциальных известный под названием преобразования Лапласа.

Начиная с 1799 г., появляются работы, в которых даны более или менее удобные интерпретации комплексного числа и определены действия над ними. Достаточно же общая теоретическая трактовка и геометрическая интерпретация была опубликована К. Гауссом лишь 1831 году.

Л. Эйлер и его современники оставили богатое наследие потомкам в виде накопленных, где-то систематизированных, где-то нет, но все же разрозненных фактов по ТФКП. Можно сказать, что фактологический материал по функциям мнимых величин, как бы, требовал своей систематизации в виде теории. Эта теория начала свое становление.

Третий этап становления ТФКП (XIX в. – XX в.). Основные заслуги здесь принадлежат О. Коши (1789–1857), Б. Риману (1826–1866), и К. Вейерштрассу (1815–1897). Каждый из них представлял одно из направлений развития ТФКП.

Представителем *первого* направления, которое в истории математики называлось «*теория моногенных или дифференцируемых функций*» был О. Коши. Он оформил разрозненные факты по дифференциальному и интегральному исчислению функций комплексного переменного, разъяснил смысл основных понятий и операций с мнимыми. В работах О. Коши изложена теория пределов и основанная на ней теория рядов и элементарных функций, сформулирована теорема, которая полностью выясняет область сходимости степенного ряда. В 1826 г. О. Коши ввел термин: вычет (буквально: *остаток*). В трудах с 1826 г. по 1829 г. он создал теорию вычетов. О. Коши вывел интегральную формулу; получил теорему существования разложения функции комплексного переменного в степенные ряды (1831). О. Коши заложил основы теории аналитических функций многих переменных; определил главные ветви многозначных функций комплексного переменного; впервые использовал разрезы плоскости (1831–1847). В 1850 г. вводит понятие монодромных функции, выделяет класс моногенных функций.

Последователем О. Коши был Б. Риман, который создал и свое «*геометрическое*» (*второе*) направление развития ТФКП. Он в своих работах преодолел изолированность представлений о функциях комплексных переменных и сформировал новые отделы этой теории, тесно связанные с другими дисциплинами. Риман сделал существенно новый шаг в истории теории аналитических функций, он предложил с каждой функцией комплексного переменного связывать представление об отображении одной области на другую. Он установил различия между функциями комплексного и действительного переменного. Б. Риман положил начало геометрической теории функций, ввел риманову поверхность, разработал теорию конформных отображений, установил связь между аналитическими и гармоническими функциями, ввел в рассмотрение дзета-функцию.

Дальнейшее развития ТФКП, происходило в другом (*третьем*) направлении. В основу которого, была положена *возможность представления функций степенными рядами*. За этим направлением закрепилось в истории название «*аналитическое*». Оно сформировалось в работах К. Вейерштрасса, в которых на передний план он выводил понятие равномерной сходимости. К. Вейерштрасс сформулировал и доказал теорему о законности приведения подобных членов в ряде. К. Вейерштрассом был получен фундаментальный результат: предел последовательности аналитических функций, равномерно сходящейся внутри некоторой области, является функцией аналитической. Он сумел обобщить теорему Коши о разложении в степенной ряд функции комплексного переменного и описал процесс аналитического продолжения степенных рядов и его применение к представлению решений системы дифференциальных уравнений. К. Вейерштрасс установил факт не только абсолютной сходимости ряда, но и равномерной сходимости. Появляется теорема Вейерштрасса о разложении целой функции в произведение. Он закладывает основы теории аналитических функций многих переменных, строит теорию делимости степенных рядов.

Рассмотрим, развитие теории аналитических функций в России. Российские математики XIX в. долгое время не желали посвятить себя новой области математики. Не смотря на это можно назвать несколько имен, для которых она не была чуждой, и перечислить некоторые работы и достижения этих российских математиков.

Одним из российских математиков был М.В. Остроградский (1801–1861). Об исследованиях М.В. Остроградского в области теории аналитических функций известно мало, но О. Коши с похвалой отзывался об этом молодом русском ученом, который применял интегралы и дал новые доказательства формул и обобщил другие формулы. М.В. Остроградский написал работу «Замечания об определенных интегралах», в которых вывел формулу Коши для вычета функции относительно полюса n-го порядка. Он изложил применения теории вычетов и формулу Коши к вычислению определенных интегралов в обширном публичном курсе лекций, прочитанном в 1858–1859 гг.

К 30-м годам относится ряд работ Н.И. Лобачевского, имеющих непосредственное значение для теории функций комплексного переменного. Теория элементарных функций комплексного переменного содержится в его работе «Алгебра или вычисление конечных» (Казань, 1834). В которой $\cos x$ и $\sin x$ определяются первоначально для x действительного как действительная и мнимая части функции $e^{x\sqrt{-1}}$. Используя ранее установленные свойства показательной функции и степенные разложения, выводятся все основные свойства тригонометрических функций. По-видимому, Лобачевский придавал особое значение такому чисто аналитическому построению тригонометрии, не зависящему от евклидовой геометрии.

Можно утверждать, что в последние десятилетия XIX в. и первое десятилетие XX в. фундаментальные исследования по теории функций комплексного переменного (Ф. Клейн, А. Пуанкаре, П. Кёбе) состояли в постепенном выяснении того, что геометрия Лобачевского есть вместе с тем геометрия аналитических функций одного комплексного переменного.

В 1850 г. профессор Петербургского университета (впоследствии академик) И.И. Сомов (1815–1876) издал «Основания теории аналитических функций», в основу которых были положены «Новые основания» Якоби.

Однако первым по-настоящему «оригинальным» русским исследователем в области теории аналитических функций комплексного переменного был Ю.В. Сохоцкий (1842–1929). Он защитил магистерскую диссертацию «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями» (СПб., 1868). С осени 1868 г. Ю.В. Сохоцкий читал курсы теории функций мнимого переменного и о непрерывных дробях с приложениями к анализу. Магистерская диссертация Ю.В. Сохоцкого посвящена приложениям теории вычетов к обращению степенного ряда (ряд Лагранжа) и в особенности к разложению аналитических функций в непрерывные дроби, а также к многочленам Лежандра. В этой работе сформулирована и доказана знаменитая теорема о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки. В докторской диссертации Сохоцкого (1873) впервые вводится в развернутом виде понятие интеграла типа Коши: $\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x} = \varphi(x)$, где a и b – два произвольных комплексных числа. Интеграл предполагается взятым по некоторой кривой («траектории»), соединяющей a и b. В этой работе доказывается ряд теорем.

Огромную роль в истории аналитических функций сыграли труды Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина, открывшие необозримую область ее приложений в аэро- и гидромеханике.

Говоря о развитии теории аналитических функций, нельзя не сказать о исследованиях С.В. Ковалевской, хотя их основное значение лежит за пределами этой теории. Успех ее работ был обусловлен совершенно новой постановкой задачи в терминах теории аналитических функций и рассмотрение времени t как комплексное переменное [5, 214–221].

На рубеже XX в. меняется характер научных исследований в области теории функций комплексного переменного. Если раньше большинство исследований в этой области проводились в плане развития одного из трех направлений (теории моногенных или дифференцируемых функций Коши, геометрических и физических идей Римана, аналитического направления Вейерштрасса), то теперь различия и связанные с ними споры преодолеваются, появляется и быстро растет число работ, в которых осуществляется синтез идей и методов. Одним из основных понятий, на котором явно обнаружились связь и соответствие геометрических представлений и аппарата степенных рядов, было понятие аналитического продолжения.

В конце XIX в. в теорию функций комплексного переменного входит обширный комплекс дисциплин: геометрическая теория функций, основанная на теории конформных отображений и римановых поверхностей. Получили цельную форму теории различных видов функций: целых и мероморфных, эллиптических и модулярных, автоморфных, гармонических, алгебраических. В тесной связи с последним классом функций развилась теория абелевых интегралов. К этому комплексу примыкала аналитическая теория дифференциальных уравнений и аналитическая теория чисел. Теория аналитических функций установила и укрепила связи с другими математическими дисциплинами.

Богатство взаимосвязей ТФКП с алгеброй, геометрией и другими науками, создание систематических основ самой науки ТФКП, большая ее практическая значимость способствовали становлению ТФКП как учебного предмета. Однако одновременно с завершением формирования основ, в теорию аналитических функций были внесены новые идеи, существенно изменяющие ее состав, характер и цели. Появляются монографии, содержащие систематическое изложение теории аналитических функций в стиле, близком к аксиоматическому и имеющих также учебные цели. Видимо, значимость результатов по ТФКП, полученных учеными рассматриваемого периода, побуждала их популяризировать ТФКП в виде чтения лекций и издания монографических исследований в обучающем ракурсе. Можно сделать вывод о возникновении ТФКП в качестве учебного предмета. В 1856 г. Ш. Брио и Т. Буке издали небольшой мемуар «Исследование функций мнимого переменного», являющийся по существу первым учебным пособием. Общие концепции в теории функции комплексного переменного начали вырабатываться в лекциях. С 1856 г. К. Вейерштрасс читал лекции о представлении функций сходящимися степенными рядами, а с 1861 г. – об общей теории функций. В 1876 г. появилась специальное сочинение К. Вейерштрасса: «К теории однозначных аналитических функций», а в 1880 г. «К учению о функциях», в которых его теория аналитических функций приобрела известную завершенность.

Лекции Вейерштрасса послужили на много лет прообразом учебников по теории функций комплексного переменного, которые начали появляться с тех пор довольно часто. Именно в его лекциях был построен в основном современный стандарт строгости в математическом анализе и выделена, ставшая традиционной, структура.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел. М.: Просвещение, 1975.
2. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: ОНТИ, 1937. Ч. 1.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1950.
5. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций / под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевич. М.: Наука, 1981.
6. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Советская энциклопедия, 1977. Т. 1.
7. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Советская энциклопедия, 1979. Т. 2.
8. Молодший В.Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века. М.: Учпедгиз, 1963.
9. Рыбников К.А. История математики. М.: Изд-во МГУ, 1963. Ч. 2.

Н.Е. Ляхова

КАСАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Вопрос о касании плоских кривых, в том случае, когда абсциссы общих точек находятся из уравнения вида $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ – некоторый многочлен, напрямую связан с вопросом о кратности корней многочлена $P_n(x)$. В данной статье сформулированы соответствующие утверждения для случаев явного и неявного задания функций, графиками которых являются кривые, а также показано применение этих утверждений при решении задач.

Если кривые, являющиеся графиками функций *y* = *f(x)* и $y=\varphi(x)$, имеют общую точку $M_0(x_0;y_0)$, т.е. $y_0=f(x_0)=\varphi(x_0)$ и касательные к указанным кривым проведенные в точке $M_0(x_0;y_0)$ не совпадают, то говорят, что кривые *y* = *f(x)* и $y=\varphi(x)$ пересекаются в точке $M_0(x_0;y_0)$.

На рисунке 1 приведен пример пересечения графиков функций.

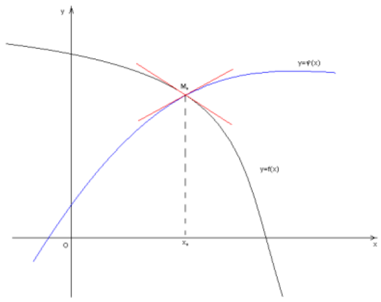

Рис. 1