Элементы теории поля

Пусть Ω – некоторая область в $\mathbb{R}^3$.

Будем говорить, что в Ω задано *скалярное поле*, если каждой точке $M \in \Omega$ поставлено в соответствие некоторое число $U(M)$.

Примерами скалярных полей могут служить поле температуры, поле плотности массы, поле плотности распределения электрических зарядов, поле освещённости, задаваемое источником света и др.

Будем говорить, что в области Ω задано *векторное поле*, если каждой точке $M \in \Omega$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\mathbf{a}(M)$.

Примерами векторных полей служат поле скоростей устоявшегося потока жидкости, гравитационное поле, электростатическое поле и т.д.

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $OXYZ$, то скалярное поле $U(M)$ описывается функцией трех переменных:

$$U(M) = U(x; y; z),$$

а векторное поле $\mathbf{a}(M)$ описывается вектор-функцией трёх переменных $\mathbf{a}(x; y; z)$ или тремя скалярными функциями – её координатами:

$$\mathbf{a}(M) = \mathbf{a}(x; y; z) = \big(P(x; y; z), Q(x; y; z), R(x; y; z)\big).$$

Скалярное и векторное поля $U(M)$ и $\mathbf{a}(M)$ называются *непрерывными*, если функции $U(x; y; z)$, $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ непрерывны в Ω.

Скалярное и векторное поля $U(M)$ и $\mathbf{a}(M)$ называются *дифференцируемыми n раз*, если функции $U(x; y; z)$, $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ дифференцируемы n раз в Ω.

Скалярные поля

Пусть в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ задано скалярное поле $U(M) = U(x; y; z)$. Функцию U будем полагать непрерывной и имеющей непрерывные производные первого порядка.

Поверхностью уровня скалярного поля $U(M)$ называют геометрическое место точек области Ω, в которых U имеет заданное фиксированное значение:

$$U(x; y; z) = C.$$

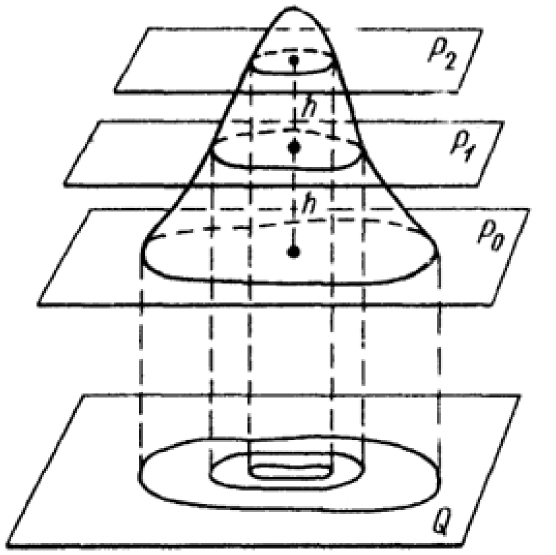
Если это уравнение имеет решения, то при условии, что производные функции U не обращаются в ноль одновременно, это уравнение задаёт гладкую поверхность в Ω. В двумерном случае $U(M) = U(x; y)$ это будут гладкие кривые; их называют *линиями уровня* поля $U(x; y)$.

Поверхности уровня, отвечающие разным C_1 и C_2 не имеют общих точек. (Почему?)

Поверхности уровня скалярного поля заполняют всю область Ω. (Почему?)

Например, линиями уровня на топографических изображаются точки, имеющие одну высоту над уровнем моря.

Скалярное поле называется *плоскапараллельным (двумерным)*, если в какой-то декартовой системе координат его можно задать функцией двух переменных $U(M) = U(u; v)$. Другими словами, поле плоскопараллельно, если существует направление, при сдвигах вдоль которого поле переходит само в себя. Поверхностями уровня такого поля являются цилиндрические поверхности.



Скалярное поле называется *осесимметрическим*, если в некоторой цилиндрической системе координат r, φ, z его можно задать функцией двух переменных r и z (не зависящей от угла φ): $U(M) = U(r; z)$. Иначе, поле осесимметрично, если при повороте на произвольный угол вокруг оси симметрии этого поля оно переходит само в себя. Поверхности уровня представляют собой поверхности вращения. Если эти поверхности круглые цилиндры, т.е. если $U(M) = U(r)$, то это поле еще и плоскопараллельно.

Скалярное поле называется *сферическим*, если его значение в точке M зависит лишь от расстояния от этой точки до некоторой фиксированной точки M_0. Поверхности уровня сферического поля – семейство концентрических сфер.

Производная скалярного поля по направлению и градиент

Пусть $M_0, M \in \Omega$. Обозначим $\overline{\lambda}$ направляющий вектор отрезка M_0M: $\overline{M_0M} = h\overline{\lambda}$. Если существует (конечный) предел

$$\lim_{M \to M_0} \frac{U(M) - U(M_0)}{h},$$

то его называют *производной скалярного поля* $U(M)$ в точке M_0 *по направлению вектора* $\overline{\lambda}$ и обозначают $\frac{\partial U}{\partial \overline{\lambda}}(M_0)$.

Если в прямоугольной системе координат $OXYZ$ вектор $\overline{\lambda}$ имеет координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то, в силу дифференцируемости функции $U(x; y; z)$,

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{\lambda}}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{U(M) - U(M_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\triangle y + \frac{\partial U}{\partial z}\triangle z + o(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial U}{\partial x}h\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}h\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}h\cos\gamma}{h} =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\cos\gamma.$$

Таким образом, *дифференцируемое скалярное поле имеет производную по любому направлению.* (См. пример 1.)

Градиентом скалярного поля U в точке M_0 называется вектор

$$\operatorname{grad} U(M_0) = \Big(\frac{\partial U}{\partial x}(M_0), \frac{\partial U}{\partial y}(M_0), \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\Big).$$

(См. пример 2.)

Для записи формул теории поля часто используют формальный вектор «набла»[1]

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

В таких обозначениях

$$\operatorname{grad} U = \nabla U.$$

Обсудим свойства градиента.

1. Производная скалярного поля по направлению вектора $\overline{\lambda}$ есть скалярное произведение градиента этого поля и вектора $\overline{\lambda}$:

   $$\frac{\partial U}{\partial \overline{\lambda}} = (\operatorname{grad} U, \overline{\lambda}).$$

2. Градиент скалярного поля в некоторой точке M_0 ортогонален поверхности уровня, проходящей через эту точку:

   уравнение касательной плоскости к поверхности уровня $U(x;y;z) = C$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид

   $$\frac{\partial U}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0,$$

   т.е. нормаль к поверхности имеет координаты $\frac{\partial U}{\partial x}(M_0)$, $\frac{\partial U}{\partial y}(M_0)$, $\frac{\partial U}{\partial z}(M_0)$.

3. Градиент указывает направление наиболее быстрого изменения скалярного поля: наибольший рост скалярного поля происходит в направлении градиента, а наибольшее убывание – в направлении, противоположном градиенту. При этом скорость изменения в направлении градиента равна величине вектора градиента.

   Это утверждение сразу следует из формулы

   $$\frac{\partial U}{\partial \overline{\lambda}}(M_0) = |\operatorname{grad} U| \cdot |\overline{\lambda}| \cdot \cos\varphi,$$

   где φ – угол между градиентом и вектором $\overline{\lambda}$.

   Другими словами, наиболее быстрое изменение скалярного поля происходит в направлении, ортогональном поверхностям уровня. (Наименьшее – в направлении поверхности уровня.)

[1] Был введен английским математиком и механиком У.Р. Гамильтоном (1805–1865). Набла – старинный музыкальный инструмент треугольной формы.

Векторные поля

Пусть в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\mathbf{a}(M) = \big(P(x;y;z), Q(x;y;z), R(x;y;z)\big)$. Функции P, Q, R будем полагать непрерывными вместе со своими частными производными первого порядка.

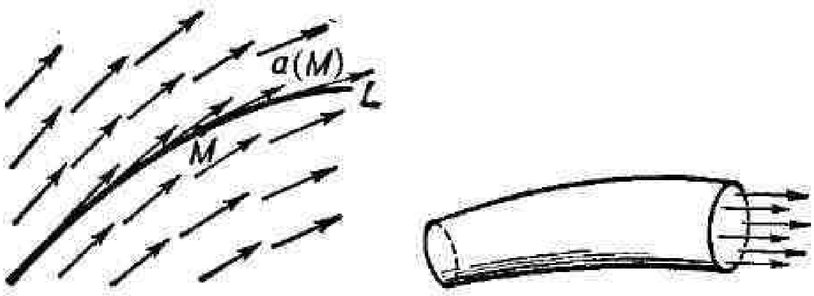
Кривая L, лежащая в области Ω, называется *векторной линией* векторного поля $\mathbf{a}(M)$, если в каждой точке этой кривой направление касательной к ней совпадает с направлением поля (в этой же точке). Параметрически в векторном виде можно записать это так:

$$\mathbf{r}'(t) = k\mathbf{a}, \qquad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0,$$

где $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор некоторой начальной точки M_0 этой кривой, $k = k(M)$ – коэффициент пропорциональности.

Например, векторными линиями поля скоростей стационарного потока жидкости являются траектории частиц жидкости.

Ограниченная поверхностью Σ часть области Ω называется *векторной трубкой*, если в каждой точке M поверхности Σ вектор нормали к этой поверхности ортогонален вектору $\mathbf{a}(M)$.



Векторная трубка целиком заполнена векторными линиями поля $\mathbf{a}(M)$ (почему?). Если хотя бы одна точка векторной линии L принадлежит векторной трубке, то вся линия L целиком содержится в этой векторной трубке (почему?). Таким образом, каждая векторная линия либо целиком лежит в векторной трубке, либо не имеет с ней общих точек. Поверхность Σ, ограничивающая векторную трубку, соткана из векторных линий. Очевидно, поток поля $\mathbf{a}$ через поверхность векторной трубки равен нулю.

Векторное поле называется *плоскапараллельным*, если в некоторой декартовой системе координат $Oxyz$ его компоненты являются функциями двух переменных:

$$\mathbf{a}(M) = \big(P(x;y), Q(x;y), R(x;y)\big).$$

Если при этом $R(x;y) = 0$, то поле называется *плоским*. Векторные линии такого поля – плоские кривые (одни и те же в каждой параллельной плоскости).

Векторное поле называется *осесимметрическим*, если в некоторой цилиндрической системе координат r, φ, z вектор $\mathbf{a}(M)$ является функцией двух переменных r и z (не зависит от угла φ):

$$\mathbf{a}(M) = \big(P(r;z), Q(r;z), R(r;z)\big).$$

Иначе, поле осесимметрично, если при повороте на произвольный угол вокруг оси симметрии этого поля (оси z) оно переходит само в себя. Если $\mathbf{a}(M)$ зависит только от r, то это поле называется *цилиндрическим*.

Векторное поле называется *одномерным*, если существует такая декартова система координат, в которой
$$\mathbf{a}(M) = \big(P(x), 0, 0\big).$$
Векторные линии такого поля – прямые, параллельные оси Ox.

Дивиргенция векторного поля

Пусть векторное поле $\mathbf{a}(M) = \big(P, Q, R\big)$ непрерывно дифференцируемо в Ω.

Если в Ω введена декартова система координат $Oxyz$, то *дивиргенцией* векторного поля $\mathbf{a}$ в точке M называют величину
$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) \qquad \text{или} \qquad \operatorname{div}\mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}).$$

Таким образом, векторное поле $\mathbf{a}(M)$ определяет скалярное поле $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$.

Существует другой способ определения дивиргенции, не зависящий от выбора системы координат: если
$$\Phi(G) = \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma$$
– поток векторного поля $\mathbf{a}$ через границу Σ тела G, а $V(G)$ – объем этого тела, то *дивиргенцией* поля $\mathbf{a}$ в точке $M \in G$ называют производную функции $\Phi(G)$ по объему при стягивании объема в точку M:
$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{G \to M} \frac{\Phi(G)}{V(G)}.$$

Если теперь в Ω ввести декартову систему координат, то составленный предел будет равен сумме частных производных $(\nabla, \mathbf{a})$ (что доказывается при помощи применения формулы Остроградского и теоремы о среднем для тройного интеграла).

Например, для поля скоростей несжимаемой жидкости дивиргенция равна плотности источников (стоков) в точке M.

Формула Остроградского в векторной форме принимает вид
$$\iint_{\partial V} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iiint_{V} \operatorname{div}\mathbf{a}\, dv.$$

Ротор векторного поля

Пусть векторное поле $\mathbf{a}(M) = \big(P, Q, R\big)$ непрерывно дифференцируемо в Ω.

Если в Ω введена декартова система координат $Oxyz$, то *ротором* (*вихрем*) векторного поля $\mathbf{a}(M)$ называют вектор
$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \mathbf{a}].$$

Также существует другой способ определения ротора, не зависящий от выбора системы координат.

Например, для поля скоростей несжимаемой жидкости дивиргенция равна плотности источников (стоков) в точке M.

Формула Стокса в векторной форме принимает вид

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{a}_\tau \, dl = \iint_\Sigma (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, d\sigma.$$

Потенциальные поля

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *потенциальным*, если его можно представить как градиент некоторого скалярного поля $U(M)$:

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} U.$$

При этом скалярное поле U называется *потенциалом* векторного поля $\mathbf{a}$.

Таким образом, любое скалярное поле U порождает потенциальное векторное поле $\operatorname{grad} U$, для которого оно служит потенциалом.

Примером потенциального векторного поля является поле силы притяжения, действующего со стороны материального тела массы m_0, расположенное в начале координат, на материальное тело массы m, расположенное в точке $M(x;y;z)$ по закону

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m_0 m}{r^3}\,\mathbf{r}, \quad \text{где} \;\; \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

потенциалом которого является

$$U(M) = \gamma \frac{m_0 m}{r}.$$

Необходимые и достаточные условия потенциальности поля дает

Теорема 1. *Пусть Ω – односвязная область в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbf{a}(M) = (P, Q, R)$ – непрерывно дифференцируемое векторное поле в Ω. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ *для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой L, лежащей в Ω;*

2) $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *не зависит от кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки A и B и лежащей в Ω;*

3) *в области Ω определена функция U, для которой $dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$;*

4) $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Или, в векторной форме:

1a) *циркуляция векторного поля $\mathbf{a}$ по любому замкнутому контуру, лежащему в Ω, равна нулю;*

2a) $\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ *не зависит от кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки A и B и лежащей в Ω;*

3a) *векторное поле $\mathbf{a}$ потенциально;*

4a) $\mathbf{rot}\,\mathbf{a} = 0$.

Таким образом, векторное поле потенциально тогда и только тогда, когда его ротор равен нулю, т.е. *потенциальное поле = безвихревое поле*.

В частности, $\mathbf{rot}\, \mathrm{grad}\, U = 0$.

Из равенства

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

виден способ нахождения потенциала: последовательно интегрируя равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = R,$$

и уточняя на каждом шаге постоянную, возникающую при интегрировании, мы с точностью до константы восстановим потенциал в односвязной области.

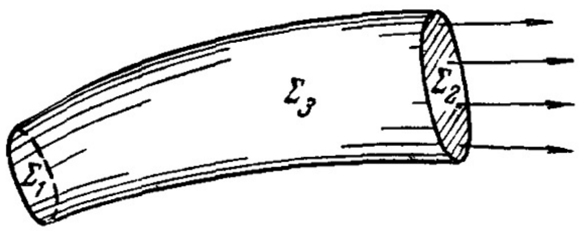
Соленоидальные поля

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *соленоидальным*[2] (*трубчатым*), если его дивиргенция равна нулю.

Примером соленоидального векторного поля может служить поле скоростей несжимаемой жидкости при отсутствии источников и стоков.

Имеет место **закон сохранения интенсивности векторной трубки**: *поток соленоидального векторного поля через любое поперечное сечение векторной трубки постоянен.*

Действительно, рассмотрим векторную трубку в соленоидальном поле $\mathbf{a}$ и возьмём её отрезок между двумя поперечными сечениями Σ_1 и Σ_2. Общий поток поля $\mathbf{a}$ через всю



замкнутую поверхность $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ в силу теоремы Остроградского равен нулю:

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\, \mathbf{a}\, dv = 0.$$

С другой стороны, он представляет собой сумму потоков через сечения Σ_1 и Σ_2 и через боковую поверхность Σ_3, причём поток через Σ_3 нулевой по определению векторной трубки: поле $\mathbf{a}$ на поверхности векторной трубки ортогонально нормали к поверхности: $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$ на Σ_3. Таким образом,

$$0 = \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma + \iint_{\Sigma_3} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma$$

для внешней (по отношению к ограниченному объему) нормали. Изменяя нормаль на поверхности Σ_1 на противоположную, получаем

$$\iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma,$$

[2] От греческого $\sigma\omega\lambda\eta\nu$ (солен) – трубка.

т.е. поток соленоидального поля через любое поперечное сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

В силу легко проверяемого равенства

$$\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \mathbf{a} = 0$$

векторное поле, представимое в виде ротора некоторого другого поля, соленоидально.

Верно и обратное: всякое соленоидальное поле можно представить в виде ротора некоторого векторного поля, т.е.

$$\forall\, \mathbf{a} - \text{соленоидальное} \quad \exists\, \mathbf{b} \ : \ \mathbf{a} = \mathbf{rot}\, \mathbf{b},$$

при этом поле $\mathbf{b}$ называется *векторным потенциалом поля* $\mathbf{a}$. Поскольку $\mathbf{rot}\, \operatorname{grad} U = 0$, векторный потенциал векторного поля можно восстановить с точностью до слагаемого вида $\operatorname{grad} U$.

Пусть $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ – соленоидальное векторное поле, и пусть $\mathbf{a} = \mathbf{rot}\, \mathbf{b}$, где $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, т.е.

$$(P, Q, R) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Для восстановления одного из векторных потенциалов можно использовать, например, такой алгоритм.

1. Положим $b_x = 0$.
   Тогда $\frac{\partial b_y}{\partial x} = R$.

2. В качестве b_y возьмём одну из первообразных этого уравнения:

   $$b_y = \int R(x; y; z)\, dx.$$

   Остаются уравнения:

   $$\frac{\partial b_z}{\partial x} = -Q, \qquad \frac{\partial b_z}{\partial y} = P + \frac{\partial b_y}{\partial z}$$

3. В качестве b_x возьмём решение первого уравнения с константой, зависящей от y и z:

   $$b_z = -\int Q(x; y; z)\, dx + C(y; z),$$

   где $C(y; z)$ удовлетворяет уравнению

   $$C'_y(y; z) = P(x; y; z) + \frac{\partial}{\partial y}\int Q(x; y; z)\, dx + \frac{\partial b_y}{\partial z}.$$

   Таким образом один из векторных потенциалов восстанавливается окончательно. (См. также пример 5.)

Вообще, любое векторное поле можно представить в виде суммы двух векторных полей, одно из которых потенциально, а другое – соленоидально.

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить производную поля $U = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ в точке $M(2;1;1)$.

Решение.

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{\lambda}} = \left(\nabla U, \overline{\lambda}\right) = 2x\cos\alpha - \frac{1}{1+(y+z)^2}\cos\beta - \frac{1}{1+(y+z)^2}\cos\gamma =$$
$$= 4\cos\alpha - \frac{1}{5}\cos\beta - \frac{1}{5}\cos\gamma.$$

Пронормируем вектор $\mathbf{a}$:

$$\overline{\lambda} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{0\cdot\mathbf{i} + 3\cdot\mathbf{j} - 4\cdot\mathbf{k}}{\sqrt{0+9+16}} = 0\cdot\mathbf{i} + \frac{3}{5}\cdot\mathbf{j} - \frac{4}{5}\cdot\mathbf{k},$$

здесь

$$0 = \cos\alpha, \quad \frac{3}{5} = \cos\beta, \quad -\frac{4}{5} = \cos\gamma.$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{\lambda}} = 4\cdot 0 - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{25}.$$

Пример 2. Вычислить угол между градиентами полей u и v: $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$, $u = \frac{xz^2}{y}$ в точке $M(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; 1)$.

Решение.

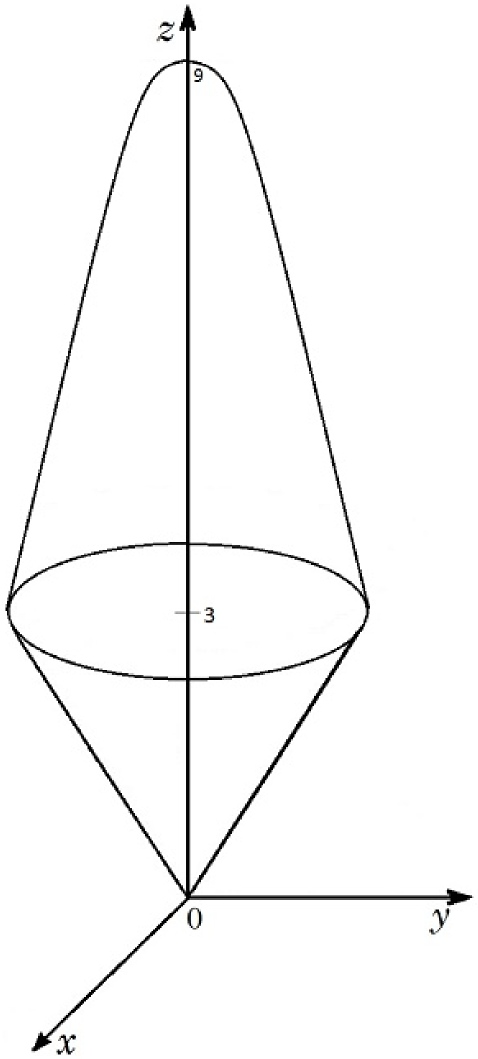
$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} v(M) &= \left(18\sqrt{6}x^2, -18\sqrt{6}y^2, 6z^2\right)|_M = \left(3\sqrt{6}, -3\sqrt{6}, 6\right);\\
\operatorname{grad} u(M) &= \left(\frac{z^2}{y}, -\frac{xz^2}{y^2}, \frac{2xz}{y}\right)|_M = \left(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\right);\\
|\operatorname{grad} v| &= \sqrt{\left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(3\sqrt{6}\right)^2 + 6^2} = 12;\\
|\operatorname{grad} u| &= \sqrt{6+6+2^2} = 4;\\
\cos\varphi &= \frac{(\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u)}{|\operatorname{grad} v|\cdot|\operatorname{grad} u|} = \frac{3\cdot 6 + 3\cdot 6 + 6\cdot 2}{12\cdot 4} = 1,
\end{aligned}$$

следовательно $\varphi = 0$.

Пример 3. Определить поток вектора $\mathbf{a} = (y, -x, 1)$ через замкнутую поверхность Σ, составленную из частей конуса $x^2+y^2 = z^2$ и плоскости $z = 4$ (во внешнюю от ограниченного объёма сторону).

Решение. Поскольку поверхность Σ замкнута, по формуле Остроградского получаем:

$$\iint\limits_{\Sigma} a_n\, dS = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{V} (0+0+0)\, dx\, dy\, dz = 0.$$



Пример 4. Определить поток вектора $\mathbf{a} = (y + 2z, -y, 3x)$ через полную поверхность Σ (во внешнюю от ограниченного объёма сторону), если

$$\Sigma \ : \ 3z = 27 - 2\left(x^2 + y^2\right), \quad z^2 = x^2 + y^2 \ \ (z \geqslant 0).$$

Решение. Найдем плоскость, по которой пересекаются данные поверхности:

$$2\left(x^2 + y^2\right) = 27 - 3z, \qquad x^2 + y^2 = z^2.$$

Получаем $2z^2 + 3z - 27 = 0$; решения этого уравнения $z_1 = 3$ и $z_2 = -\frac{18}{4}$, причём z_2 не удовлетворяет условию $z \geqslant 0$, следовательно, $z = 3$ – плоскость пересечения данных поверхностей, а линией пересечения служит окружность $x^2 + y^2 = 9$.

Вычислим поток по формуле Остроградского:

$$\iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = -\iiint\limits_{V} dx\, dy\, dz =$$

$$= -\iint_S dx\, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{9-\frac{2}{3}\left(x^2+y^2\right)} dz = -\iint_S \left(9 - \frac{2(x^2+y^2)}{3} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy =$$

В области $S=\{x^2+y^2\leqslant 9\}$ перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$:

$$=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 r\left(9-\frac{2r^2}{3}-r\right)dr=-2\pi\left(9\frac{r^2}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^3=-36\,\pi.$$

Пример 5. Определить, является ли поле $\mathbf{a}=(1+2xy)\mathbf{i}-y^2z\mathbf{j}+(z^2y-2yz+1)\mathbf{k}$ соленоидальным. Если да, найти его векторный потенциал.

Решение. Выясним, является ли поле соленоидальным:

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=(\nabla,\mathbf{a})=2y-2yz+2zy-2y=0,$$

поле соленоидально.

Найдем его векторный потенциал $\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$ (с точностью до слагаемого $\operatorname{grad}U$). Положим $b_x=0$. Тогда

$$\mathbf{a}=\mathbf{rot}\,\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 0&b_y&b_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\mathbf{j}+\frac{\partial b_y}{\partial x}\mathbf{k},$$

отсюда

$$b_y=\int a_z\,dx=\int(z^2y-2yz+1)\,dx=xyz^2-2xyz+x,$$

$$b_z=-\int a_y\,dx+C(y;z)=\int y^2z\,dx+C(y;z)=xy^2z+C(y;z),$$

причём

$$C'_y(y;z)=a_x+\frac{\partial}{\partial y}\int a_y\,dx+\frac{\partial b_y}{\partial z}=1+2xy-2xyz+2xyz-2xy=1,$$

следовательно, $C(y;z)=y$. Окончательно получаем

$$\mathbf{b}=(xyz^2-2xyz+x)\mathbf{j}+(xy^2z+y)\mathbf{k}.$$