Определенный интеграл Римана

Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Схема построения интеграла, введенного Бернхардом Риманом, состоит в следующем.

Возьмем на отрезке $[a, b]$ произвольный конечный набор точек, таких что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Множество таких точек называется *разбиением отрезка* $[a, b]$, будем обозначать его

$$T = \{x_i\}_{i=0}^{n}.$$

Рассмотрим произвольный отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ между двумя соседними точками разбиения и обозначим его длину

$$\triangle x_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = \overline{0, n-1}.$$

Диаметр или *мелкость* разбиения T — это наибольшая из длин отрезков разбиения:

$$d = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \triangle x_i.$$

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольным образом точку $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. *Интегральная сумма*, составленная для функции f, отвечающая разбиению T и выбору точек $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$, есть сумма

$$\sigma(T, \{\xi_i\}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \triangle x_i.$$

Функция f называется *интегрируемой по Риману на отрезке* $[a, b]$, если существует конечный предел интегральных сумм, на зависящий от способа разбиения T отрезка $[a, b]$ и выбора точек $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$, то есть существует такое число $I \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ с диаметром $d < \delta(\varepsilon)$ и для любого выбора точек $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ выполняется

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \triangle x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Как обычно, это записывается в виде

$$I = \lim_{d \to 0} \sigma(T, \{\xi_i\}).$$

Это число I называется *определенным интегралом* или *интегралом Римана* функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Пример 1. Постоянная функция $f(x) \equiv c$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, так как для любого разбиения T и любого выбора точек $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ интегральная сумма равна

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \triangle x_i = c \sum_{i=0}^{n-1} \triangle x_i = c(b-a),$$

то есть интегральные суммы представляют собой постоянную величину, а значит и предел их существует и равен этой величине

$$\int_a^b c\, dx = \lim_{d \to 0} \sigma(T, \{\xi_i\}) = c(b-a).$$

Теорема 1 (Необходимое условие интегрируемости)**.** *Если f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. о/п. Предположим, что f интегрируема, но не ограничена на отрезке $[a,b]$. В силу интегрируемости

$$I-\varepsilon<\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i<I+\varepsilon$$

для некоторого разбиения T при заданном $\varepsilon>0$ и любом выборе $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$. В силу неограниченности функции, найдется отрезок разбиения $[x_k,x_{k+1}]$, на котором f не ограничена и, следовательно, слагаемое $f(\xi_k)\triangle x_k$, а вместе с ним и вся интегральная сумма $\sum f(\xi_i)\triangle x_i$, выбором точки ξ_k могут быть сделаны сколь угодно большими (по абсолютной величине), что будет противоречить указанному неравенству. □

Замечание 1. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать только ограниченные функции.

Замечание 2. Условие ограниченности является именно необходимым, но не достаточным для интегрируемости функции по Риману, что демонстрирует следующий пример.

Пример 2. Рассмотрим функцию Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[a,b];\\ 0, & x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[a,b].\end{cases}$$

Составим две интегральные суммы

$$\sigma_1=\sum_{i=0}^{n-1} D(\xi_i)\triangle x_i=b-a,\qquad \xi_i\in\mathbb{Q}\cap[x_i,x_{i+1}],$$

$$\sigma_2=\sum_{i=0}^{n-1} D(\xi_i')\triangle x_i=0,\qquad \xi_i'\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[x_i,x_{i+1}].$$

Поскольку они имеют разные пределы при $d\to 0$, т.е. предел интегральных сумм зависит от выбора точек $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$, функция Дирихле не интегрируема на $[a,b]$, хотя она и ограничена.

Суммы Дарбу

Пусть f определена и ограничена на отрезке $[a,b]$.

Возьмем произвольное разбиение отрезка $T=\{x_i\}_{i=0}^{n}$. Поскольку f ограничена на $[a,b]$, она ограничена и на любом отрезке разбиения $[x_i,x_{i+1}]$.

Обозначим $m_i=\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $M_i=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ и введем суммы

$$s(T)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\triangle x_i,\qquad S(T)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\triangle x_i,$$

которые называют соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу, соответствующими разбиению T.*

Из неравенства

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\leqslant f(\xi)\leqslant \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x),\qquad \xi\in[\alpha,\beta],$$

и определения интегральной суммы и сумм Дарбу следует соотношение между этими суммами

$$s(T) \leqslant \sigma(T, \{\xi_i\}) \leqslant S(T),$$

которое верно для любого разбиения T и любого выбора точек $\{\xi_i\}$.

Если при фиксированном разбиении T мы будем искать точную нижнюю грань интегральных сумм в зависимости от выбора точек $\{\xi_i\}$, то, очевидно, получим нижнюю сумму Дарбу. Если же перейдем к супремуму, то получим верхнюю сумму Дарбу. Таким образом, имеет место

Свойство 1. При фиксированном разбиении T суммы Дарбу являются точными границами множества интегральных сумм:

$$s(T) = \inf_{\{\xi_i\}} \sigma(T, \{\xi_i\}), \qquad S(T) = \sup_{\{\xi_i\}} \sigma(T, \{\xi_i\}).$$

Обсудим другие свойства сумм Дарбу.

Свойство 2. При добавлении точек деления нижняя сумма Дарбу может разве лишь увеличиться, а верхняя — разве лишь уменьшиться.

Это свойство является прямым следствием того факта, что инфимум на некотором множестве меньше или равен инфимумума на подмножестве:

$$\inf_{x \in A} f(x) \leqslant \inf_{x \in B} f(x), \quad \text{если} \ \ B \subseteq A.$$

Для супремума – наоборот. Поэтому, если в разбиение добавить, например, одну точку x^*, то она разобьет некоторый отрезок $[x_k, x_{k+1}]$ на две части, и инфимум на каждой из полученных частей будет больше или равен инфимума на всем отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Следовательно, и вся нижняя сумма Дарбу для нового разбиения будет не менее нижней суммы Дарбу для исходного разбиения. Для верхней суммы Дарбу – аналогично.

Свойство 3. Любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу, пусть даже они составлены по разным разбиениям.

Доказательство. Возьмем два разбиенения отрезка $[a, b]$ — T' и T''. Обозначим соответствующие суммы Дарбу s', S' и s'', S'' соответственно. Покажем, что $s' \leqslant S''$ и $s'' \leqslant S'$.

Введем разбиение T, составленное из всех точек разбиений T' и T'', и обозначим соответствующие ему суммы Дарбу s и S. Если T' и T'' не совпадали, то T имеет больше точек, чем T' и чем T''. Следовательно, по свойству 2,

$$s' \leqslant s \ \text{ и } \ s'' \leqslant s, \qquad S \leqslant S' \ \text{ и } \ S \leqslant S''.$$

Сопоставляя эти неравенства и учитывая, что $s \leqslant S$, получаем нужный результат. □

Рассмотрим множество всех нижних сумм Дарбу, составленных для всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$. Согласно свойству 3, оно ограничено сверху любой верхней суммой Дарбу, следовательно, существует супремум этого множества, обозначим его I_*:

$$I_* = \sup_T s(T).$$

Аналогично, рассмотрим множество всех верхних сумм Дарбу для различных разбиений отрезка $[a, b]$. Так же по свойству 3, оно ограничено снизу любой нижней суммой Дарбу, следовательно, существует инфимум этого множества, обозначим его I^*:

$$I^* = \inf_T S(T).$$

Числа I_* и I^* называют *нижним и верхним интегралами Дарбу* соответственно.

Так как для любых T', T''

$$s(T') \leqslant S(T''),$$

то, переходя в этом неравенстве к супремуму по всевозможным T', получим

$$\sup_{T'} s(T') = I_* \leqslant S(T''),$$

где T'' – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда, переходя в последнем неравенстве к инфимуму по всем T'', получаем

$$I_* \leqslant I^*.$$

Другая (предельная) характеристика интегралов Дарбу отражена следующим свойством.

Свойство 4.

$$I_* = \lim_{d\to 0} s(T), \qquad I^* = \lim_{d\to 0} S(T).$$

Доказательство. Действительно, если мы возьмем разбиение T и начнем уменьшать его диаметр, это будет означать, что в разбиении будут появляться новые точки. При этом нижние суммы Дарбу будут разве лишь увеличиваться. При стремлении $d \to 0$ соответствующие неубывающие последовательности нижних сумм Дарбу будут сходиться к своему супремуму, то есть

$$\lim_{d\to 0} s(T) = \sup_{T} s(T) = I_*.$$

Для верхних сумм – аналогично. □

Теорема 2 (Критерий Римана)**.** *Для того, чтобы ограниченная функция f была интегрируемой на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T отрезка $[a, b]$, при котором*

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку функция интегрируема, найдется число I такое, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall T \;(d < \delta(\varepsilon)) \;\; \forall\, \{\xi_k\} \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Берем любое разбиение T с диаметром $d < \delta(\varepsilon)$. Тогда

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку нижняя и верхняя суммы Дарбу являются точной нижней и верхней границей множества интегральных сумм, получаем

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s(T) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i \leqslant S(T) \leqslant I + \varepsilon,$$

то есть

$$S(T) - s(T) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Достаточность. Сначала заметим, что $I^* = I_*$.
Действительно,

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S(T) - s(T),$$

для любого T, а по условию для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T, для которого $S(T) - s(T) < \varepsilon$, то есть мы получаем

$$0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon,$$

для любого $\varepsilon > 0$, а значит разность $I^* - I_*$ может быть только нулем.

Итак, в условиях теоремы верхний и нижний интегралы Дарбу совпали (в общем случае это не так). Обозначим их символом $I = I^* = I_*$.

Для любого разбиения T и любого соответствующего выбора точек $\{\xi_i\}$ справедливо неравенство

$$s(T) \leqslant \sigma(T, \{\xi_i\}) \leqslant S(T).$$

При $d \to 0$ по свойству 4 сумм Дарбу $s(T) \to I_* = I$ и $S(T) \to I^* = I$. Следовательно, по правилу «двух милиционеров», интегральная сумма тоже стремится к I независимо от выбора точек $\{\xi_i\}$. $\square$

Полезным для дальнейшего рассмотрения является понятие *колебания функции* f на отрезке $[a,b]$:

$$\omega(f, [a,b]) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Упражнение. Покажите, что $\omega(f,[a,b]) = \sup\limits_{x',x''\in[a,b]} |f(x') - f(x'')|$.

Обозначим $\omega_i(f) = \omega(f, [x_i, x_{i+1}])$. Тогда критерий Римана можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2$'$. *Для того, чтобы ограниченная функция f была интегрируемой на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T отрезка $[a,b]$, при котором*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f)\triangle x_i < \varepsilon.$$

Сумму вида

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f)\triangle x_i$$

часто называют *колебательной суммой для функции f на отрезке* $[a,b]$.

Классы интегрируемых функций

Теорема 3. *Непрерывная на отрезке $[a,b]$ интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на $[a,b]$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Возьмем разбиение T отрезка $[a,b]$ с диаметром $d < \delta$ и рассмотрим произвольный отрезок $[x_i, x_{i+1}]$. Колебание функции f на этом отрезке, в силу II теоремы Вейерштрасса, можно записать в виде

$$\omega_i(f) = M_i - m_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) = f(x_i^*) - f(\hat{x}_i),$$

где точки $x_i^*, \hat{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Следовательно, $f(x_i^*) - f(\hat{x}_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (поскольку $|x_i^* - \hat{x}_i| \leqslant \triangle x_i \leqslant d < \delta$).

Тогда для колебательной суммы получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i(f)\triangle x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n-1} \triangle x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию интегрируемости (теорема 2$'$) функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. $\square$

Теорема 4. *Если функция монотонна и ограничена на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f — неубывающая на $[a,b]$. Если $f(a)=f(b)$, то $f(x)\equiv \mathrm{const}$ и, согласно примеру 1, она интегрируема.

Будем считать, что $f(a)<f(b)$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и разбиение T отрезка $[a,b]$ такое, что
$$d<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$
В силу монотонности f, $\omega_i(f)=f(x_{i+1})-f(x_i)\geqslant 0$, следовательно, $\omega_i(f)\triangle x_i\leqslant d\cdot\omega_i(f)$, тогда
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i(f)\triangle x_i &\leqslant d\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i(f)=\\ &= d\Big(f(x_1)-f(a)+f(x_2)-f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})-f(x_{n-2})+f(b)-f(x_{n-1})\Big)=\\ &= d(f(b)-f(a))<\varepsilon.\end{aligned}$$

Отсюда, по критерию интегрируемости, функция f интегрируема на $[a,b]$. □

Теорема 5. *Ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция f, имеющая на $[a,b]$ конечное число точек разрыва, интегрируема на $[a,b]$.*

Простейшие свойства интеграла

Свойство 1. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда их сумма $f+g$ также интегрируема на отрезке $[a,b]$ и имеет место равенство
$$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 2. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и C – константа. Тогда функция Cf интегрируема на $[a,b]$ и имеет место равенство
$$\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 3. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда она интегрируема на любом отрезке $[a_1,b_1]\subset[a,b]$.

Свойство 4. Пусть $a<c<b$. Тогда, если f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, она интегрируема на отрезке $[a,b]$ и имеет место равенство
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Свойство 5. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то их произведение fg тоже интегрируемо на отрезке $[a,b]$.

Свойство 6. Если две функции отличаются на отрезке не более чем в конечном числе точек и одна из них интегрируема, то и вторая интегрируема и их интегралы равны.

Интеграл и неравенство

Определение 1. Интегралом по отрезку $[b,a]$, где $b>a$, называется
$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Свойство 1. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $|f|$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и при $a<b$ имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Свойство 2. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \geqslant 0$. Тогда при $a<b$

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Свойство 3. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $f(x) > 0$. Тогда при $a<b$

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Следствие 1. *Если f и g интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x)<g(x)$ $(f(x)\leqslant g(x))$ для всех $x\in[a,b]$, то при $a<b$*

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx \qquad \left(\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx\right). \tag{1}$$

Теоремы о среднем для интеграла

Теорема 6 (Первая теорема о среднем значении)**.** *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m\leqslant f(x)\leqslant M$ при всех $x\in[a,b]$. Тогда найдется такое $\mu\in[m,M]$, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

Доказательство. 1). Пусть $a<b$. По свойству (1)

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

Разделим неравенство на $b-a>0$:

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M.$$

Таким образом, нашлось требуемое число $\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \in [m,M]$.

2). Пусть теперь $a>b$. По предыдущему случаю

$$m \leqslant \frac{\int_b^a f(x)\,dx}{a-b} \leqslant M.$$

Тогда

$$m \leqslant \frac{-\int_a^b f(x)\,dx}{-(b-a)} \leqslant M,$$

и, как и в первом случае, $\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$. □

Следствие 2. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то найдется такое $c\in[a,b]$, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Доказательство. Согласно II теореме Вейерштрасса функция f достигает своих точных граней на отрезке $[a,b]$, т.е. найдутся такие $x_1, x_2 \in [a,b]$, что $f(x_1) = m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ и $f(x_2) = M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при всех $x \in [a,b]$. По первой теореме о среднем существует такое $\mu \in [m,M]$, что $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$. По второй теореме Больцано–Коши о промежуточном значении непрерывной функции найдется такое $c \in [a,b]$, что $f(c) = \mu$. Таким образом, получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).\square$$

Теорема 7 (Обобщенная теорема о среднем)**.** *Пусть на отрезке* $[a,b]$*:*

1) f *и* g *интегрируемы;*

2) $m \leqslant f(x) \leqslant M$*;*

3) g *не меняет знака.*

Тогда существует $\mu \in [m,M]$ *такое, что выполняется равенство*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Предположим, что $a < b$ и $g(x) \geqslant 0$. Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad x \in [a,b].$$

По свойству (1)

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx.$$

Так как $g(x) \geqslant 0$, $\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$.

Если $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то в качестве μ можно взять любое число из отрезка $[m,M]$.

Если $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$, то

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M$$

Таким образом,

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx} = \mu \in [m,M].$$

Остальные случаи: $g(x) \leqslant 0$ и $a > b$ – рассмотреть самостоятельно. $\square$

Следствие 3. *Если на отрезке* $[a,b]$ *функция* f *непрерывна, а функция* g *интегрируема и не меняет знака, то найдется такое* $c \in [a,b]$*, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 2. $\square$

Теорема 8 (Вторая теорема о среднем)**.** *Пусть на отрезке* $[a,b]$*:*

1) f *монотонна;*

2) g *интегрируема.*

Тогда найдется $\xi \in [a,b]$ *такое, что выполняется равенство*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Функция

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b],$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом интегрирования.*

Теорема 9. *Если f интегрируема на $[a,b]$, то F непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0\in[a,b]$ и дадим ей приращение $\triangle x$, не выводящее за пределы отрезка $[a,b]$: $x_0+\triangle x\in[a,b]$. Тогда, используя свойства интеграла, получим

$$F(x_0+\triangle x)-F(x_0)=\int_a^{x_0+\triangle x} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x_0+\triangle x} f(t)\,dt=$$

по первой теореме о среднем

$$=\mu\triangle x,\quad \mu\in[m,M].$$

Таким образом,

$$F(x_0+\triangle x)-F(x_0)=\mu\triangle x\to 0\ \text{ при }\ \triangle x\to 0$$

как произведение бесконечно малой и ограниченной. □

Теорема 10. *Если f интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0\in[a,b]$, то F дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0)=f(x_0)$.*

Доказательство. Для любого $x\in[a,b]$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=\frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0}-f(x_0)=\frac{\int_{x_0}^x f(t)dt-f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=\frac{\int_{x_0}^x [f(t)-f(x_0)]dt}{x-x_0}.$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех $t\in[a,b]$, $|t-x_0|<\delta$, выполняется $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$. Тогда для любого x, $0<|x-x_0|<\delta$

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|\leqslant\frac{\left|\int_{x_0}^x [f(t)-f(x_0)]\,dt\right|}{|x-x_0|}\leqslant\frac{\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt}{|x-x_0|}<\frac{\varepsilon\left|\int_{x_0}^x dt\right|}{|x-x_0|}=\frac{\varepsilon|x-x_0|}{|x-x_0|}=\varepsilon,$$

что по определению означает дифференцируемость функции $F(x)$ в точке $x_0\in[a,b]$ и равенство $F'(x_0)=f(x_0)$. □

Теорема 11 (Существование первообразной)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда функция*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

является первообразной для функции f на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что

$$\left(\int_{x_0}^x f(t)dt\right)'=f(x),$$

а это по определению, означает, что F является первообразной функцией для f на отрезке $[a,b]$. □

Теорема 12 (Ньютон – Лейбниц). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ есть ее первообразная на этом отрезке, то имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что функция $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ есть первообразная для функции f на отрезке $[a, b]$. Следовательно, любая другая ее первообразная Φ имеет вид

$$\Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C,$$

поэтому

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt + C = C,$$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C.$$

Следовательно,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)dt. \qquad \square$$

Полученная формула называется *основной формулой интегрального исчисления*. Ее часто записывают в виде

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(t)\Big|_a^b,$$

где введено обозначение

$$\Phi(t)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Интеграл с переменным нижним пределом

Интеграл с переменным нижним пределом вводится аналогично интегралу с переменным верхним пределом, а именно: если функция f интегрируема на $[a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ определен интеграл $\int_x^b f(t)\,dt$. Тем самым задана функция:

$$x \;\mapsto\; \int_x^b f(t)\,dt,$$

которая и называется *интегралом с переменным нижним пределом*:

$$F(x) = \int_x^b f(t)\,dt.$$

Поскольку

$$\int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt,$$

свойства интегралов с переменным верхним пределом переносятся соответствующим образом на интегралы с переменным нижним пределом:

– если f интегрируема на $[a, b]$, то Φ непрерывна;

– если f непрерывна на $[a, b]$, то Φ дифференцируема и $F'(x) = -f(x)$.

Можно также рассмотреть интеграл с двумя переменными пределами: если функции φ и ψ определены и непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и принимают значения в $[a, b]$ и функция f интегрируема на $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt$$

непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Если же при этом φ и ψ дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$, а f непрерывна на $[a, b]$, то функция F дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и

$$F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Методы вычисления определенного интеграла

Теорема 13. *Для непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций u, v имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Учитывая, что

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

получаем

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Отсюда следует требуемое равенство. □

Формулу интегрирования по частям удобно записать в виде

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Пример 3. Вычислим интеграл

$$\int_0^\pi x\cos x\, dx = \int_0^\pi x\, d\sin x = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\, dx =$$

$$= -\int_0^\pi \sin x\, dx = \cos x\Big|_0^\pi = -2.$$

Замена переменной под знаком определенного интеграла

Теорема 14. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$ и*

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b,$$

причем $a = \min_{t\in[m,M]} \varphi(t)$, $b = \max_{t\in[m,M]} \varphi(t)$. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt.$$

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$. Функции $\Phi(x)$ и $x = \varphi(t)$ дифференцируемы на отрезках $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ соответственно. Согласно правилу вычисления производной сложной функции,

$$\frac{d}{dt}\Phi(\varphi(t)) = \Phi'(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Учитывая, что $\Phi'(\varphi(t)) = \Phi'(x)$ при $x = \varphi(t)$, а $\Phi'(x) = f(x)$, получим

$$\frac{d}{dt}\Phi(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Таким образом, функция $\Phi(\varphi(t))$ является на отрезке $[\alpha, \beta]$ первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т. е.

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Следовательно, с одной стороны

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

а с другой стороны

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

что и требовалось. □

Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Плоская фигура, ограниченная дугой графика функции на этом отрезке и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, называется *криволинейной трапецией.*

Площадь криволинейной трапеции (при $a < b$) определяется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными на отрезке $[a, b]$ кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ при условии, что $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ на $[a, b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ определяется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Пусть $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ — кривая в полярных координатах. Плоская фигура, ограниченная дугой графика функции на этом отрезке и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ называется *криволинейным сектором.*

Площадь криволинейного сектора (при $\alpha < \beta$) определяется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Вычисление длин дуг

Пусть кусочно-гладкая кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a, b].$$

Тогда длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то длина дуги соответствующей кривой находится по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$