Ряды Лорана

Более общим типом степенных рядов являются ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные степени $z-z_0$. Как и ряды Тейлора, они играют важную роль в теории аналитических функций.

Определение 1. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \qquad c_n \in \mathbb{C},$$

называется *рядом Лорана*[1].

Область сходимости ряда Лорана, очевидно, определяется областями сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \tag{1}$$

По свойствам степенных рядов, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в круге с центром в точке z_0 конечного или бесконечного радиуса R: $|z-z_0| < R$, и его сумма $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ является аналитической в этом круге.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ заменой переменной $t = (z-z_0)^{-1}$ приводится к степенному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}t^n$, который сходится в некотором круге $|t| < R_1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ сходится вне круга с центром в точке z_0 радиуса $\rho = R_1^{-1}$: $|z-z_0| > \rho$, и его сумма $f_2(z)$ – аналитическая в этой области.

Если $R < \rho$, то ряды (1) не имеют общих точек сходимости и ряд Лорана расходится.

Если $R = \rho$, то ряд Лорана может сходиться только в точках окружности $|z-z_0| = R$. Этот случай нам не будет интересен, поскольку мы преимущественно изучаем функции в областях.

Если $\rho < R$, то областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо $\rho < |z-z_0| < R$.

Итак, мы установили:

- *областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо* $\rho < |z-z_0| < R$, $\rho < R$.
- *сумма ряда Лорана является аналитической функцией в этом кольце:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = f_1(z)+f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \qquad \rho < |z-z_0| < R.$$

Справедливо и обратное утверждение.

[1] Лоран, Пьер Альфонс (Laurent, Pierre Alphonse), 1813–1854, французский математик.

Теорема 1 (Теорема Лорана). *Функция, аналитическая в кольце $\rho < |z - z_0| < R$, однозначно представима в нём рядом Лорана.*

Доказательство. 1). *Представление.* Возьмём ρ_1 и R_1: $\rho < \rho_1 < R_1 < R$ и рассмотрим функцию $f(z)$ в замкнутом кольце $\rho_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant R_1$. По интегральной теореме Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1} \cup C_{\rho_1}^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{2}$$

для любой точки z из кольца $\rho_1 < |z - z_0| < R_1$.[2]

Интеграл по C_{R_1}, как и в доказательстве теоремы Тейлора (см. теорему **??**), можно представить в виде суммы степенного ряда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \tag{3}$$

сходящегося в круге $|z - z_0| < R_1$.

Рассмотрим интеграл по C_{ρ_1}. Для этого преобразуем функцию

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{-1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}.$$

Для $\zeta \in C_{\rho_1}$ выполнено $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{\rho_1}{z - z_0} = q < 1$, тогда

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

причём этот ряд сходится равномерно на C_{ρ_1}. Подставим это разложение под знак интеграла и проинтегрируем ряд почленно:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\, d\zeta =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\, d\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n-1}}{(z - z_0)^{n+1}},$$

где

$$c_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\, d\zeta.$$

Сдвигая счётчик на единицу, получаем нужное нам представление интеграла в виде ряда:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \qquad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\, d\zeta, \tag{4}$$

область его сходимости: $|z - z_0| > \rho_1$.

Подставим полученные разложения в (2) и получим представление функции $f(z)$ в виде ряда Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

[2] В формуле (2) C_{R_1} и C_{ρ_1} – окружности с общим центром z_0 радиусов R_1 и ρ_1 соответственно.

сходящегося в произвольной точке z области $\rho_1 < |z - z_0| < R_1$. Поскольку ρ_1 и R_1 были взяты произвольно, это разложение верно для любой точки z из области $\rho < |z - z_0| < R$.

Коэффициенты c_n этого разложения вычисляются по похожим, но всё-таки разным, формулам при $n \geqslant 0$ и $n < 0$. Для унификации обозначений деформируем, пользуясь аналитичностью подынтегральный функции[3], контуры C_{R_1} и C_{ρ_1} в формулах (3) и (4) к одному контуру γ, лежащему в кольце $\rho_1 < |z - z_0| < R_1$ и содержащему точку z_0 внутри:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \, d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Окончательно для любого z: $\rho < |z - z_0| < R$, получаем:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2). *Единственность.* Предположим, существуют два разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n, \qquad \rho < |z - z_0| < R.$$

Домножим функцию $f(z)$ на $(z - z_0)^{-m-1}$ и проинтегрируем произведение по окружности $|z - z_0| = R_0$, $\rho < R_0 < R$. Пользуясь тем, что

$$\oint_{C_{R_0}} (z - z_0)^{n-m-1} \, dz = \int_0^{2\pi} R_0^{n-m-1} e^{i(n-m-1)\varphi} i R_0 e^{i\varphi} \, d\varphi = i R_0^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} \, d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi i, & n = m, \end{cases}$$

получаем

$$\oint_{C_{R_0}} f(z)(z - z_0)^{-m-1} \, dz = 2\pi i \cdot c_m = 2\pi i \cdot d_m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

что доказывает единственность разложения. □

Особые точки аналитических функций

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки z_0: $0 < |z - z_0| < R$, и в самой точке z_0 её аналитичность нарушается[4]. Такие точки будем называть *изолированными особыми точками* функции $f(z)$.

Согласно теореме Лорана, в этом случае функция $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана на множестве $0 < |z - z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Первую сумму – ряд по неотрицательным степеням $z - z_0$ – называют *правильной частью ряда Лорана*, а вторую сумму, содержащую только отрицательные степени – *главной частью ряда Лорана.*

Особые точки принято характеризовать по предельным свойствам функции или по структуре ряда Лорана. Эти подходы равносильны. Мы изберём второй способ.

[3] а именно, интегральной теоремой Коши.

[4] Это означает, что $f(z)$ не является аналитической в любой окрестности точки z_0.

Определение 2. Изолированная особая точка z_0 называется

- *устранимой особой точкой*, если главная часть ряда Лорана не содержит ни одного слагаемого, т.е. $c_{-n} = 0$ при $n \in \mathbb{N}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n;$$

- *полюсом k-го порядка*, если главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, причём $c_{-k} \neq 0$ и $c_{-n} = 0$ при $n > k$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n};$$

полюс первого порядка называют также *простым полюсом*;

- *существенно особой точкой*, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

Приведём простые и удобные характеристики особых точек на языке предельного перехода.

1. `Характеристика устранимой особой точки.`

Из определения устранимой особой точки с очевидностью следует

Утверждение 1. *Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то функция $f(z)$ имеет в этой точке конечный предел, а именно*

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = c_0,$$

где c_0 – коэффициент из разложения функции в ряд Лорана.

В частности, функция $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности устранимой особой точки. Верно и обратное.

Утверждение 2. *Если функция $f(z)$ – аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки z_0 и ограничена на этом множестве, то z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(z)$ – аналитическая в кольце $0 < |z - z_0| < R$. Тогда, согласно теореме Лорана, она разложима в ряд Лорана в этом кольце, а коэффициенты могут быть вычислены по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где C_ρ – окружность с центром в точке z_0 радиуса $\rho \in (0; R)$. Из ограниченности функции получаем

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}}\, \rho |ie^{i\varphi}|\, d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\rho^n} \rho\, d\varphi = \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда, если $n < 0$, то $|c_n| \to 0$ при $\rho \to 0$, следовательно, $c_n = 0$ при $n < 0$ и z_0 – устранимая особая точка. □

В итоге для аналитической в $0 < |z - z_0| < R$ функции $f(z)$ получаем:

- *z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f(z)$ ограничена в $0 < |z-z_0| < R$;*
- *z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ существует конечный предел $\lim_{z\to z_0} f(z)$.*

З а м е ч а н и е. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то её можно доопределить в этой точке по непрерывности:

$$f(z_0) := \lim_{z\to z_0} f(z) = c_0.$$

Тогда её разложение в ряд Лорана будет выполнено в целой окрестности точки z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad |z-z_0| < R,$$

а значит, по свойствам степенных рядов, (доопределённая) функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z-z_0| < R$. Это объясняет название особой точки – «устранимая»: нарушение аналитичности в этой точке можно устранить простым доопределением функции.

Пример 1. Функция $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$ – аналитическая в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, имеет единственную (конечную) особую точку $z_0 = 0$.

1-й способ: ряд Лорана в окрестности точки z_0. Пользуясь разложением косинуса в окрестности нуля, получаем:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}z^{2n}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Этот ряд содержит только правильную часть, следовательно, z_0 – устранимая особая точка.

Изначально мы вынуждены выкалывать в этом разложении точку $z = 0$ (условие $|z| > 0$), поскольку множитель $\frac{1}{z^2}$ не определён в нуле. Но окончательное разложение уже определено в нуле, поэтому, как уже говорилось, можно считать эту функцию определённой в нуле и аналитической. Точку $z = \infty$ выкалываем по условию сходимости ряда для косинуса.

2-й способ: существует предел

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2},$$

следовательно, $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

2. Характеристика полюса.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в проколотой окрестности точки z_0. Точка z_0 является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть z_0 – полюс k-го порядка, т.е.

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad 0 < |z-z_0| < R,$$

где $c_{-k} \neq 0$. Тогда функция

$$\varphi(z) = f(z)(z-z_0)^k = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + \ldots$$

аналитическая в $0 < |z-z_0| < R$ и $\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = c_{-k} \neq 0$. По свойствам предела

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k} \to \infty \quad \text{при} \quad z \to z_0.$$

Достаточность. Пусть $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, т.е.

$$\forall\, E > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, z: \; 0 < |z-z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z)| > E.$$

Для z: $0 < |z-z_0| < \delta$ введём функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Она аналитическая в этой области и ограничена:

$$|g(z)| < \frac{1}{E},$$

следовательно, z_0 – устранимая особая точка функции $g(z)$, т.е.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad 0 < |z-z_0| < \delta, \tag{5}$$

причём $c_0 = 0$, поскольку $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$. Пусть c_k – первый ненулевой коэффициент в разложении (5), т.е.

$$g(z) = c_k(z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots + c_{k+n}(z-z_0)^{k+n} + \ldots = (z-z_0)^k \varphi(z),$$

где функция

$$\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z-z_0) + \ldots + c_{k+n}(z-z_0)^n + \ldots$$

аналитическая в круге $|z-z_0| < \delta$ и $\varphi(z_0) = c_k \neq 0$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k \varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k},$$

где $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ – аналитическая в круге $|z-z_0| < \delta$ и $\psi(z_0) \neq 0$. Разложим её в ряд Тейлора и получим

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z-z_0)^n = \frac{c'_0}{(z-z_0)^k} + \frac{c'_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c'_{k-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c'_{n+k}(z-z_0)^n,$$

причём $c'_0 = \psi(z_0) \neq 0$, следовательно z_0 – полюс k-го порядка функции $f(z)$. $\square$

Определение 3. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в круге $|z-z_0| < R$. Точка z_0 называется *нулём k-го порядка* функции $f(z)$, если функция представима в виде

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z), \qquad |z-z_0| < R,$$

где $g(z)$ – аналитическая в $|z-z_0| < R$ и $g(z_0) \neq 0$.

Из доказательства предыдущей теоремы можно извлечь следующие связи:

- *z_0 – полюс k-го порядка функции $f(z)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ z_0 – нуль k-го порядка функции $\frac{1}{f(z)}$;*

- *z_0 – полюс k-го порядка функции $f(z)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\psi(z)$ – аналитическая в окрестности точки z_0 и $\psi(z_0) \neq 0$;*
- *z_0 – полюс k-го порядка функции $f(z)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f(z) \sim \frac{A}{(z-z_0)^k}$ при $z \to z_0$.*

Пример 2. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$ – аналитическая в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, имеет единственную (конечную) особую точку $z_0 = 0$; охарактеризуем её.

1-й способ: ряд Лорана в окрестности нуля. Воспользуемся разложением синуса в степенной ряд в окрестности нуля:

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}z^{2n}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Главная часть ряда Лорана состоит из одного слагаемого степени $n = -2$, следовательно, $z = 0$ – полюс 2-го порядка.

2-й способ:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^3} = \infty,$$

следовательно, $z_0 = 0$ – полюс. Определим его порядок:

$$\frac{\sin z}{z^3} \sim \frac{1}{z^2} \ \text{ при } \ z \to 0,$$

следовательно, z_0 – полюс 2-го порядка.

3. `Характеристика существенно особой точки.`

Теорема 3 (теорема Сохоцкого[5]). *Пусть z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда*

$$\forall\, A \in \mathbb{C}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \ \exists\, z_1 :\ 0 < |z_1 - z_0| < \delta\ \wedge\ |f(z_1) - A| < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим обратное: пусть

$$\exists\, A \in \mathbb{C}\ \exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, z :\ 0 < |z - z_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$; она аналитическая в кольце $0 < |z-z_0| < \delta$ и ограничена, следовательно z_0 – её устранимая особая точка. Следовательно, её можно представить в виде

$$g(z) = (z - z_0)^k\varphi(z), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая в круге $|z - z_0| < \delta$ и $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда

$$f(z) = A + \frac{1}{(z - z_0)^k\varphi(z)} = A + \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^k},$$

где $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ – аналитическая в круге $|z - z_0| < \delta$. Следовательно,

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^k} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \ldots + (A + c_k) + c_{k+1}(z - z_0) + \ldots$$

Если в этом представлении $k = 0$, то z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, если $k > 0$, то z_0 – полюс k-го порядка; оба эти утверждения противоречат условию. □

[5]Сохоцкий, Юлиан Васильевич (1842-1929) – русский математик.

З а м е ч а н и е 1. Можно привести другую (равносильную) формулировку теоремы Сохоцкого: *Если z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A существует последовательность точек $z_n \to z_0$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Таким образом,

- *z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ не существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.*

Пример 3. Функция $f(z) = z \cdot \sin\dfrac{1}{z}$ – аналитическая в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, имеет единственную (конечную) особую точку $z_0 = 0$; определим её тип.

1-й способ: выпишем ряд Лорана в окрестности нуля. Для этого воспользуемся разложением синуса в степенной ряд:

$$\sin\frac{1}{z} = \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}}, \quad |t| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad |z| > 0.$$

Тогда

$$f(z) = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n}}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, следовательно, $z = 0$ – существенно особая точка.

2-й способ: найдём $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$. Для последовательности $z_n = \frac{1}{\pi n}$

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \pi n}{\pi n} = 0.$$

Для последовательности $z_k = \frac{i}{\pi k}$

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{i \sin(-i\pi k)}{\pi k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi k)}{\pi k} = \infty.$$

Следовательно, предела в нуле не существует и $z = 0$ – существенно особая точка.

Вычет аналитической функции в изолированной особой точке

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ однозначно разложима в ряд Лорана в некотором кольце $0 < |z - z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Определение 4. *Вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 (обозначается $\text{Выч}\, f(z_0)$ или $\operatorname{res} f(z_0)$) называется число

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz, \tag{6}$$

где γ – произвольный замкнутый контур, проведённый вокруг точки z_0 и лежащий в области аналитичности функции $f(z)$.

Данное определение корректно, поскольку, в силу интегральной теоремы Коши, величина интеграла (6) не зависит от выбранного контура.

Очевидно, что

- вычет в точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} ряда Лорана в окрестности этой точки:

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz = c_{-1};$$

- в устранимой особой точке вычет равен нулю.

В случае полюса можно указать простые формулы для нахождения вычета.

1. `Простой полюс. Общая формула.` В случае простого полюса

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots, \qquad \text{где } c_{-1} \neq 0,$$

следовательно

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0). \tag{7}$$

2. `Простой полюс. Частный случай.` Если функция представлена в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические в некоторой окрестности точки z_0, причём $\varphi(z_0) \neq 0$, а для функции $\psi(z)$ точка z_0 является нулём первого порядка, т.е.

$$\psi(z) = \psi'(z_0)(z-z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots, \qquad \psi'(z_0) \neq 0,$$

то вычет также можно вычислить по формуле

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{8}$$

3. `Полюс` k`-го порядка.` В этом случае

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots, \qquad \text{где } c_{-k} \neq 0,$$

следовательно

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \big(f(z)(z-z_0)^k \big). \tag{9}$$

Пример 4. Найти вычеты во всех конечных особых точках функции $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z(z^3+1)^2}$.

Конечные особые точки данной функции – это нули знаменателя:

$$z(z^3+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0,\ -1,\ e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$$

Точка $z = 0$ является нулём как знаменателя, так и числителя, причём

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi z}{z(z^3+1)^2} = \pi,$$

следовательно, $z=0$ – устранимая особая точка и Выч $f(0)=0$.

Точка $z=-1$ также является нулём как знаменателя, так и числителя. В этом случае

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2} = \lim_{z\to -1} \frac{-\sin \pi(z+1)}{(z+1)^2(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2} =$$
$$= \lim_{z\to -1} \frac{-\pi}{(z+1)(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2} = \infty,$$

следовательно, $z=-1$ – полюс 1-го порядка (так как $f(z)\sim \frac{const}{(z+1)}$ при $z\to -1$)[6]. Найдём вычет:

$$\text{Выч}\, f(-1) = \lim_{z\to -1} f(z)(z+1) = \lim_{z\to -1} \frac{\sin \pi z}{(z+1)(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2} =$$
$$= \frac{-\pi}{(-1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})^2(-1-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{-\pi}{9}.$$

Точки $z=e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$ является нулями знаменателя второго порядка и не являются нулями числителя:

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{z(z+1)^2(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2},$$

следовательно, это полюса второго порядка функции $f(z)$.

$$\text{Выч}\, f(e^{\frac{i\pi}{3}}) = \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{d}{dz} \frac{\sin \pi z}{z(z+1)^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2} =$$
$$= \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{\pi\cos(\pi z)}{z(z+1)^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2} - \frac{\sin(\pi z)\Big((z+1)^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2 + 2z(z+1)(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2 + 2z(z+1)^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})\Big)}{z^2(z+1)^4(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^4}$$

Пользуясь тем, что

$$e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \qquad e^{\frac{i\pi}{3}} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\Big) = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}},$$
$$e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{-i\pi}{3}} = \Big(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\Big) = i\sqrt{3},$$
$$\cos(\pi e^{\frac{i\pi}{3}}) = \cos\left(\pi\Big(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\Big)\right) = -\sin\frac{i\pi\sqrt{3}}{2} = i\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin(\pi e^{\frac{i\pi}{3}}) = \sin\left(\pi\Big(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\Big)\right) = \cos\frac{i\pi\sqrt{3}}{2} = \mathrm{ch}\,\frac{\pi\sqrt{3}}{2},$$

вычисляем вычет.

Вычет в точке $z=e^{\frac{-i\pi}{3}}$ вычисляется аналогично.

[6] Можно рассуждать так: $z=-1$ – нуль знаменателя второго порядка и нуль числителя – первого, следовательно, она является полюсом первого порядка.

Вычеты и интегралы

Вычет в изолированной особой точке z_0 есть, по определению, значение интеграла

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz$$

по замкнутому контуру γ, проведённому вокруг точки z_0. Однако на это равенство можно смотреть и как на возможность вычисления интеграла при помощи вычета подынтегральной функции в особой точке:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \text{Выч}\, f(z_0).$$

Если контур γ содержит внутри не одну, а несколько изолированных особых точек функции аналитической $f(z)$, то такой интеграл также может быть вычислен при помощи вычетов.

Теорема 4 (Основная теорема о вычетах)**.** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и пусть она непрерывна в $\overline{G}$. Тогда*

$$\oint_{\partial G} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведём вокруг каждой особой точки z_k замкнутый контур γ_k, лежащий в области G и окружающий только одну особую точку – z_k. Рассмотрим область G' с границей $\partial G' = \partial G \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \ldots \cup \gamma_n^-$; она является многосвязной. По теореме Коши для многосвязной области

$$\int_{\partial G'} f(z)\, dz = 0.$$

Отсюда

$$\oint_{\partial G} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^-} f(z)\, dz = 0$$

или

$$\oint_{\partial G} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k). \qquad \square$$

Можно соединить теоремы о вычислении интегралов по замкнутому контуру от аналитической функции (интегральную теорему Коши и основную теорему о вычетах) в одно утверждение:

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G за исключением, быть может, конечного числа особых точек. Тогда для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$, не проходящего через особые точки,

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \begin{cases} 2\pi i \sum \text{Выч}\, f(z_k) & \textit{по всем } z_k\textit{, лежащим внутри контура } \gamma, \\ 0, & \textit{если внутри } \gamma \textit{ нет особых точек.} \end{cases}$$

Ряд Лорана в бесконечно удалённой точке

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области $R < |z| < \infty$. Эта область есть проколотая окрестность бесконечно удалённой точки. Согласно теореме Лорана, функция однозначно представима в этой области степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Первую сумму называют *правильной частью* ряда Лорана *в окрестности бесконечно удалённой точки*; эти слагаемые не имеют особенности в области $R < |z| < \infty$: они все бесконечно малые, кроме нулевого слагаемого, которое является постоянным.

Вторую сумму называют *главной частью* ряда Лорана: все её слагаемые бесконечно большие при $z \to \infty$. Именно эта часть ряда характеризует особую точку $z = \infty$, и эта характеристика такая же, как и в случае конечной точки z_0:

- $z = \infty$ является устранимой особой точкой, если главная часть ряда Лорана не содержит ни одного слагаемого;
- $z = \infty$ является полюсом, если главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, причём это полюс k-го порядка, если $c_k \neq 0$ и $c_n = 0$ при $n > k$;
- $z = \infty$ является существенно особой точкой, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

Ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки можно рассматривать как ряд по степеням $\frac{1}{z}$. При таком подходе разделение ряда на главную и правильную части совпадает с разделением в случае конечной особой точки.

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удалённой точке называется число

$$\text{Выч}\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z)\, dz,$$

где γ – произвольный замкнутый контур, проведённый вокруг точки $z = 0$ и лежащий в кольце $R < |z| < \infty$.

Это определение совпадает с определением вычета в конечной точке, поскольку γ служит замкнутым контуром, проведённым вокруг точки $z = \infty$, и при этом обход этой точки является положительным.

Однако в терминах коэффициентов ряда Лорана формула вычета отличается от случая конечной точки:

$$\text{Выч}\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z)\, dz = -c_{-1},$$

и это коэффициент слагаемого из правильной части ряда Лорана.

Отсюда следует, что даже в случае, когда $z = \infty$ не является особой точкой, вычет в ней может оказаться не нулевым.

В ряде случаев есть простые формулы для нахождения вычеты в бесконечно удалённой точке:

- если $f(z) \sim \frac{A}{z}$ при $z \to \infty$, то $\text{Выч}\, f(\infty) = -A$;
- если $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$ при $z \to \infty$, то $\text{Выч}\, f(\infty) = 0$.

Вычеты во всех особых точках аналитической функции есть величина постоянная, а именно

Теорема 5 (Теорема о сумме вычетов)**.** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k) + \text{Выч}\, f(\infty) = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Проведём замкнутый контур γ, окружающий все конечные особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда, по основной теореме о вычетах,

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k).$$

С другой стороны

$$\oint_{\gamma^-} f(z)\, dz = 2\pi i\, \text{Выч}\, f(\infty).$$

Отсюда получаем равенство (10). □