Монотонность, выпуклость, асимптоты

Исследование поведения функции при помощи производных

Производная функции геометрически связана с графиком этой функции, а именно, она характеризует наличие касательной и численно равна тангенсу угла наклона касательной в выбранной точке.

В этой лекции мы пойдем немного дальше и свяжем такие характеристики функции и ее графика, как монотонность, экстремум, выпуклость и перегиб и поведением производных первого и более высоких порядков.

Теорема 1. *Пусть функция f дифференцируема на (a, b). Тогда на этом интервале справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $f'(x) > 0$, то f возрастает.*
2. *Если f возрастает, то $f'(x) \geqslant 0$.*
3. *Если $f'(x) \geqslant 0$, то f — неубывающая.*
4. *Если f — неубывающая, то $f'(x) \geqslant 0$.*
5. *$f'(x) \equiv 0 \iff f(x) \equiv C$.*
6. *Если $f'(x) < 0$, то f убывает.*
7. *Если f убывает, то $f'(x) \leqslant 0$.*
8. *Если $f'(x) \leqslant 0$, то f — невозрастающая.*
9. *Если f — невозрастающая, то $f'(x) \leqslant 0$.*

Доказательство.

1. Пусть $f'(x) > 0$. Возьмем точки $x_1 < x_2$ из (a, b). Тогда по теореме Лагранжа
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$
2. Пусть $f(x)$ возрастает. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ и для любого Δx
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) \geqslant 0.$$
3. Аналогично 1.
4. Аналогично 2.
5. $\Rightarrow$). Пусть $f'(x) = 0$. Для любых x_1, $x_2 \in (a, b)$ по теореме Лагранжа
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2).$$

5. $\Leftarrow$). Очевидно.

Свойства 6–9 доказываются аналогично 1–4. □

Определение 1. Говорят, что функция f имеет в точке x_0 *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность этой точки, в которой выполняется неравенство
$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)).$$
Если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, тогда точка x_0 называется *точкой строгого максимума (минимума)* функции f.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами функции*.

Необходимые условия экстремума

Теорема 2. *Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.*

Доказательство. Пусть x_0 – точка минимума. Тогда в некоторой окрестности этой точки

$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0.$$

Тогда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x < x_0 \qquad \text{и} \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x > x_0.$$

Если производная в точке x_0 существует, то существуют правая и левая производные и они равны. Переходя в пределу в неравенствах, получаем $f'_-(x_0) \leqslant 0$ и $f'_+(x_0) \geqslant 0$, следовательно $f'(x_0) = 0$. □

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называют *точками, подозрительными на экстремум* (или *точками возможного экстремума*). Точки экстремума функции следует искать только среди точек, подозрительных на экстремум.

Достаточные условия экстремума

Теорема 3. *(Достаточные условия экстремума в терминах первой производной.) Пусть x_0 — точка, подозрительная на экстремум для функции f. Если f дифференцируема в некоторой (возможно, проколотой) окрестности точки x_0, и при переходе через эту точку $f'(x)$ меняет знак, то x_0 является точкой экстремума функции f, причем, если*

$$f'(x) \leqslant 0 \text{ при } x < x_0 \quad \text{и} \quad f'(x) \geqslant 0 \text{ при } x > x_0,$$

то x_0 – точка минимума, а если

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ при } x < x_0 \quad \text{и} \quad f'(x) \leqslant 0 \text{ при } x > x_0,$$

то x_0 – точка максимума.

Доказательство. Сразу следует из теоремы 1. □

Теорема 4. *(Достаточные условия экстремума в терминах производных высших порядков.) Пусть*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n – нечетное, то в точке x_0 нет экстремума, если n – четное, то x_0 – точка экстремума, причем, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума, а если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки x_0. В силу равенства нулю производных получим

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Запишем остаточный член в форме $(x - x_0)^n \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Тогда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \alpha(x) = \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right](x - x_0)^n.$$

Заметим, что при стремлении x к x_0 знак скобки целиком определяется знаком $f^{(n)}(x_0)$.

Пусть $n = 2k - 1$. Для определенности будем считать, что $f^{(n)}(x_0) < 0$. Тогда при $x < x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right](x - x_0)^{(2k-1)} > 0,$$

так как оба множителя отрицательны, а при $x > x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right](x - x_0)^{(2k-1)} < 0,$$

то есть в окрестности точки x_0 функция f принимает значения как больше $f(x_0)$, так и меньше, следовательно, x_0 – не точка экстремума.

Пусть $n = 2k$. Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то в окрестности точки x_0 при $x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right](x - x_0)^{(2k)} > 0,$$

следовательно, x_0 – точка минимума. Если же $f^{(n)}(x_0) < 0$, то при $x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right](x - x_0)^{(2k)} < 0,$$

и x_0 – точка максимума. $\square$

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 1$ на экстремум.

Найдем точки, подозрительные на экстремум:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

I способ. В точке $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } x < -1 & f'(x) > 0 \\ \text{при } x > -1 & f'(x) < 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \text{ — точка max}.$$

В точке $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } x < 1 & f'(x) < 0 \\ \text{при } x > 1 & f'(x) > 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \text{ — точка min}.$$

II способ. Вторая производная: $f''(x) = 6x$ не равна нулю в точках $x = \pm 1$.

$$\begin{array}{ccc} f''(-1) = -6 < 0 & \Longrightarrow & x = -1 \text{ — точка max}, \\ f''(1) = 6 < 0 & \Longrightarrow & x = 1 \text{ — точка min}. \end{array}$$

Выпуклость функции на промежутке. Точки перегиба

Понятие выпуклости функции связано с понятием выпуклой фигуры на плоскости. А именно, если надграфик кривой является выпуклой фигурой, то и функцию, определяющую эту кривую, называют выпуклой. Дадим строгое определение.

Определение 2. Функция f называется *выпуклой вниз (выпуклой) на интервале* (a, b), если на любом $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ график функции лежит не выше хорды, соединяющей концы этого графика, т.е. для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$

$$f(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1), \quad x \in (x_1, x_2). \tag{1}$$

Функция f называется *выпуклой вверх (вогнутой) на интервале* (a, b), если на любом $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ график функции лежит не ниже хорды, соединяющей концы этого графика, т.е. для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$

$$f(x) \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1), \quad x \in (x_1, x_2). \tag{2}$$

Если в условиях (1), (2) выполнено строгое неравенство, то функция f называется *строго выпуклой*, соответственно *вниз или вверх*.

Определение 3. Точка на графике функции называется *точкой перегиба*, если при переходе через эту точку меняется направление выпуклости.

Для исследования необходимых и достаточных условий выпуклости функции запишем неравенства (1), (2) в более удобной эквивалентной форме. Будем считать, что x_1 выбрано меньше, чем x_2. Тогда, домножая (1) на $x_2 - x_1 > 0$, получим

$$f(x)(x_2 - x_1) \leqslant \left(f(x_2) - f(x_1)\right)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x_1), \quad x \in (x_1, x_2).$$

Слева в скобке прибавим и отнимем x и разобьем левую часть на два слагаемых, а справа приведем подобные:

$$f(x)(x_2 \pm x - x_1) = f(x)(x_2 - x) - f(x)(x_1 - x) \leqslant f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1), \quad x \in (x_1, x_2),$$

отсюда

$$f(x)(x_2 - x) - f(x_1)(x_2 - x) \leqslant f(x_2)(x - x_1) - f(x)(x - x_1), \quad x \in (x_1, x_2).$$

Разделим обе части неравенства на $(x - x_1)(x_2 - x) > 0$ и получим равносильную форму неравенства (1):

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x \in (x_1, x_2). \tag{1'}$$

Аналогично, неравенство (2) можно записать в форме

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x \in (x_1, x_2). \tag{2'}$$

Необходимые и достаточные условия выпуклости функции описывает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть f дифференцируема на (a, b). Тогда на этом интервале справедливы следующие утверждения.*

1. *f выпукла вниз $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ неубывающая;*
2. *f строго выпукла вниз $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ возрастает;*
3. *f выпукла вверх $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ невозрастающая;*
4. *f строго выпукла вверх $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ убывает.*

Доказательство. 1. $\Rightarrow$). Пусть функция f выпукла вниз на (a, b). Возьмем $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Переходя в неравенстве $(1')$ к пределу при $x \to x_1$, получим

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

а устремляя x к x_2, получим

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2).$$

Таким образом

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

то есть $f'(x)$ – неубывающая.

1. $\Leftarrow$). Пусть $f'(x)$ неубывающая на (a, b). Возьмем произвольные $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, и произвольный x между x_1 и x_2.

На отрезке $[x_1, x]$ по теореме Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1) \quad \text{при некотором } c_1 \in (x_1, x),$$

а на отрезке $[x, x_2]$:
$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2) \quad \text{при некотором } c_2 \in (x, x_2).$$
По построению c_1 получилась меньше, чем c_2, следовательно $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, откуда следует неравенство $(1')$:
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1) \leqslant f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Утверждение 3 доказывается аналогичным образом.

2. $\Rightarrow$). Пусть функция f строго выпукла вниз на (a, b), то есть для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, выполнено условие
$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1} < \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}, \quad \xi \in (x_1, x_2).$$
Применяя теорему Лагранжа к отрезкам $[x_1, \xi]$ и $[\xi, x_2]$, получим
$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1} = f'(c_1) < \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi} = f'(c_2), \qquad \text{где } \ c_1 \in (x_1, \xi), \ c_2 \in (\xi, x_2).$$
Запишем условие строгой выпуклости на отрезке $[x_1, c_1]$:
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(c_1)-f(x)}{c_1-x}, \quad x \in (x_1, c_1).$$
Отсюда
$$f'(x_1) \leqslant f'(c_1).$$
Из условия строгой выпуклости на отрезке $[c_2, x_2]$:
$$\frac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad x \in (c_2, x_2),$$
получаем
$$f'(c_2) \leqslant f'(x_2).$$
В итоге
$$f'(x_1) \leqslant f'(c_1) < f'(c_2) \leqslant f'(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x_1) < f'(x_2),$$
то есть $f'(x)$ строго возрастает на (a, b).

Достаточность в утверждении 2 доказывается так же, как в 1. Советую в этом убедиться.

Доказательство утверждения 4 рекомендуется провести самостоятельно. $\square$

Таким образом, выпуклость гладкой функции непосредственно связана с монотонностью ее производной. Мы можем выписать следующие важные следствия.

Следствие 1. *Пусть f дважды дифференцируема на (a, b). Тогда*
$$\begin{array}{lcl}
f(x) \text{ выпукла вниз (вверх)} & \Longleftrightarrow & f''(x) \geqslant 0 \ (f''(x) \leqslant 0); \\
f(x) \text{ строго выпукла вниз (вверх)} & \Longrightarrow & f''(x) \geqslant 0 \ (f''(x) \leqslant 0); \\
f''(x) > 0 \ \ (f''(x) < 0) & \Longrightarrow & f \text{ строго выпукла вниз (вверх).}
\end{array}$$

Отсюда сразу получаем необходимые и достаточные условия перегиба.

Теорема 6. *(Необходимое условие точки перегиба). Пусть точка x_0 является точкой перегиба функции f, тогда, если в этой точке есть вторая производная, то она равна нулю.*

Теорема 7. *(Достаточные условия перегиба в терминах второй производной.) Пусть функция f дважды дифференцируема в некоторой (возможно, проколотой) окрестности точки x_0. Если при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак, то x_0 является точкой перегиба функции f.*

Теорема 8. *(Достаточные условия перегиба в терминах производных высших порядков.) Пусть*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n – нечетное, то x_0 – точка перегиба функции f, а если n – четное, то в точке x_0 перегиба нет.

Асимптоты графика функции

Определение 4. Если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, то прямая $y = A$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to -\infty$. Аналогично при $x \to +\infty$.

Если

$$\lim_{x\to a-0(+0)} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой*.

Прямая $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to-(+)\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to-(+)\infty} [f(x) - kx]$, называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to -(+)\infty$.