Комплексные числа

Традиционно под комплексными числами понимают числа z вида $x+iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$ и i – мнимая единица – число, обладающее свойством $i^2 = -1$. Множество комплексных чисел принято обозначать $\mathbb{C}$. Число x называют *действительной частью* комплексного числа z и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, а число y – *мнимой частью* (обозначают $y = \operatorname{Im} z$).

Несмотря на то, что в дальнейшем часто будут использоваться введённые обозначения, для определения комплексных чисел мы изберём другой, несколько более абстрактный подход, который лучше проявляет структуру и свойства этого множества.

Определение 1. Рассмотрим множество всех упорядоченных пар действительных чисел (x, y). Каждую такую пару будем называть *комплексным числом* $z = (x, y)$, если для них введено понятие равенства и определены операции сложения и умножения следующим образом: для любых двух чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$

- $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;
- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$.

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Сделаем **несколько замечаний** по поводу введённого объекта.

1. Арифметические операции над комплексными числами обладают следующими свойствами (легко проверяемыми на основе соответствующих свойств действительных чисел):

1. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения).
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения).
3. $\exists\, \mathbf{0} \in \mathbb{C} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad z + \mathbf{0} = z$ (существование нейтрального элемента).

   Очевидно, таким элементом является $\mathbf{0} = (0, 0)$.
4. $\forall\, z \in \mathbb{C} \quad \exists\, \zeta \in \mathbb{C} \quad z + \zeta = \mathbf{0}$ (существование обратного элемента).

   Обратным элементом служит число $\zeta = (-x, -y)$.
5. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (ассоциативность умножения).
6. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (коммутативность умножения).
7. $\exists\, \mathbf{1} \in \mathbb{C} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad z \cdot \mathbf{1} = z$ (нейтральный элемент относительно умножения).

   Легко видеть, что таким элементом служит комплексное число $\mathbf{1} = (1, 0)$.
8. $\forall\, z \in \mathbb{C} \backslash \{\mathbf{0}\} \quad \exists\, \zeta \in \mathbb{C} \quad z \cdot \zeta = \mathbf{1}$ (обратный относительно умножения).

   Пусть $z = (x, y)$, $\zeta = (\xi, \eta)$. Уравнение $z \cdot \zeta = \mathbf{1}$ по правилу умножения и равенства комплексных чисел равносильно системе:

   $$(x, y) \cdot (\xi, \eta) = (1, 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x\xi - y\eta = 1 \\ y\xi + x\eta = 0 \end{cases}$$

   которая в силу невырожденности (определитель системы $x^2 + y^2 \neq 0$) имеет единственное решение

   $$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \eta = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

9. $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad (z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 \quad$ (дистрибутивность).

Таким образом, множество комплексных чисел образует *поле.* (В отличие от пространства $\mathbb{R}^2$.)

2. Следует иметь в виду, что поле комплексных чисел является *неупорядоченным* множеством в отличие от поля действительных чисел, т.е. на нем невозможно ввести отношение порядка, согласующееся с операциями сложения и умножения. Другими словами: комплексные числа нельзя сравнивать[1].

3. Как и во множестве действительных чисел, нейтральные и обратные элементы определены однозначно. *Единственность нуля и обратного элемента относительно операции сложения* следует из соответствующих свойств действительных чисел и определения равенства комплексных чисел как «покоординатного» равенства. *Единственность единицы* (так же, как *единственность обратного элемента относительно умножения*) является следствием правил равенства и умножения комплексных чисел и невырожденности соответствующей системы уравнений при $z \neq \mathbf{0}$.

4. `Действительные числа.` Комплексные числа вида $(x, 0)$ ведут себя при сложении и умножении так, как если бы у них отсутствовала вторая компонента: для любых $z_1 = (x_1, 0)$, $z_2 = (x_2, 0)$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, 0), \qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2, 0),$$

т.е. они складываются и умножаются как действительные числа $x \in \mathbb{R}$. В связи с этим комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествляют с действительными числами: $(x, 0) = x$. В частности, в дальнейшем будем обозначать нулевой элемент $\mathbf{0} = (0, 0)$ просто 0 и единичный элемент $\mathbf{1} = (1, 0)$ просто 1.

5. `Мнимая единица.` Комплексное число $(0, 1)$ обладает свойством $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, т.е. при возведении в квадрат даёт действительное число -1. Это число называют *мнимой единицей* и обозначают (вслед за Леонардом Эйлером[2]) символом i.

6. `Мнимые числа.`

Комплексные числа вида $(0, y)$ можно представить в виде произведения мнимой единицы $i = (0, 1)$ и действительного числа y (или комплексного числа $(y, 0)$):

$$(0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0) = iy.$$

Эти числа называют *мнимыми.*

7. `Алгебраическая форма комплексного числа.` Теперь мы можем записать комплексное число в традиционной *алгебраической форме*:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Число x называют *действительной частью* комплексного числа $z = (x, y)$ и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, а число y – *мнимой частью* и обозначают $y = \operatorname{Im} z$.

Сопряжённым к комплексному числу $z = x + iy$ называют число $x - iy$, его обозначают $\overline{z}$: $\overline{z} = x - iy$.

Комплексные числа, записанные в алгебраической форме, складывают и умножают как обычные многочлены (с учётом равенства $i^2 = -1$), и это соответствует введённому выше сложению и умножению.

---

[1] Совсем другими словами: запись $z_1 > z_2$ для комплексных чисел не имеет смысла.

[2] Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707–1783), выдающийся математик швейцарского происхождения, бо́льшую часть жизни работавший в России.

Для деления комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, удобно использовать приём, связанный с домножением числителя и знаменателя дроби на число, сопряжённое к знаменателю.

Например,

$$z = \frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+7i-2}{9+1} = \frac{1}{10} + i\frac{7}{10}.$$

***Проверьте**, что число $\frac{1}{z}$, найденное таким способом (домножением на $\overline{z}$), является обратным к z относительно операции умножения и совпадает с числом, найденным в свойстве 8 (см. выше).*

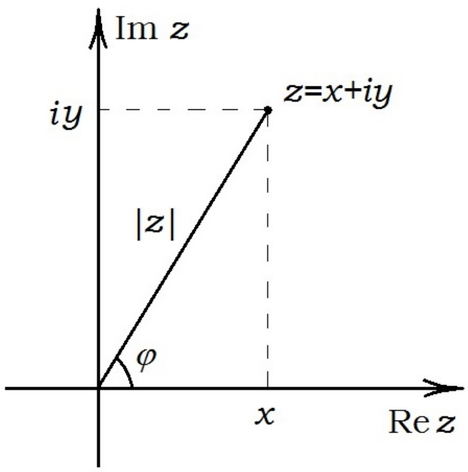
8. `Комплексная плоскость.` Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. В силу свойства

$$\alpha \cdot z = (\alpha, 0) \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

которое выглядит как умножение вектора на число, и определения сложения комплексных чисел

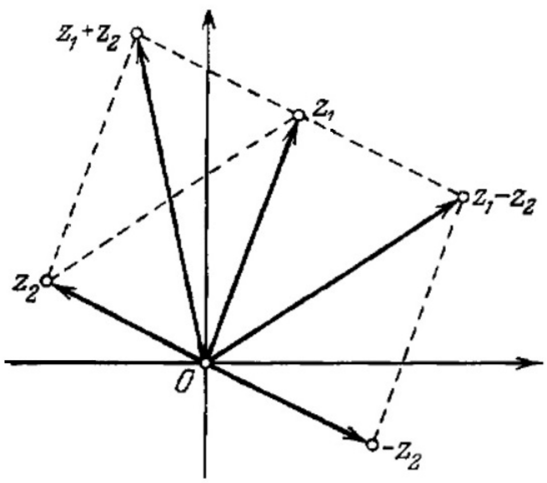
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

которое выглядит как сложение векторов, удобно трактовать комплексные числа как вектора и изображать их в виде точек на плоскости или в виде векторов, отложенных из начала координат в точку z.



По оси абсцисс принято откладывать действительную часть числа, по оси ординат – мнимую. Такая плоскость называется *комплексной плоскостью.*

Сопряжённое число и операции сложения и вычитания комплексных чисел на плоскости:



9. `Модуль и аргумент.` Если наложить на комплексную плоскость полярную систему координат (обычным образом), то каждая точка однозначно определяется при помощи угла и расстояния до начала координат.

Модулем комплексного числа называется величина

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Для действительных чисел эта формула даёт привычное значение модуля: если $y = 0$, то $|z| = |x|$.
- Умножение комплексного числа на своё сопряжённое всегда даёт квадрат модуля:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

- Число и его сопряжённое равны по модулю: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\overline{z}|$.
- Модуль (по-прежнему) играет роль расстояния от точки до начала отсчёта.
- Иногда модуль обозначают r, как в полярной системе координат.

Аргументом φ комплексного числа z называется угол между радиус-вектором точки z на комплексной плоскости и действительной положительной полуосью. Очевидно, что такой угол определяется неоднозначно (с точностью до слагаемых, кратных 2π). Значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, называют *главным значением аргумента* и обозначают $\arg z$. Все значения аргумента комплексного числа z обозначают $\operatorname{Arg} z$: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Например, для действительных положительных чисел $\arg z = 0$, для действительных отрицательных $\arg z = \pi$, для мнимых положительных $\arg z = \frac{\pi}{2}$, для мнимых отрицательных $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Число 0 – единственное число, для которого аргумент не определён.

10. `Тригонометрическая форма комплексного числа.` Зная модуль и аргумент комплексного числа, можно найти его действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} z = x = |z| \cdot \cos\varphi, \qquad \operatorname{Im} z = y = |z| \cdot \sin\varphi,$$

где φ – любое значение аргумента числа z. Отсюда получается тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

11. `Мнимая экспонента.` Важную роль в представлении комплексных чисел играет *мнимая экспонента* – величина $e^{i\varphi}$, где φ – действительное число. Согласно *формуле Эйлера*,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

- Формулу Эйлера можно рассматривать как определение мнимой экспоненты, а можно и как равенство комплексных чисел (которое требует обоснования). Идейно доказательство этой формулы состоит в следующем. Известно, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$$

  Подставим в это равенство $t = i\varphi$ и, пользуясь тем, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ..., получим

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n\frac{i\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \\ &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \ldots + \\ &\quad + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) = \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi. \end{aligned}$$

  Это не строгое доказательство, поскольку мы не определили понятие сходимости ряда из комплексных чисел и ничего не знаем о том, можно ли такие ряды перегруппировывать указанным способом. Это будет проделано в соответствующем разделе.

- Пока мы будем рассматривать равенство (1) как определение или обозначение для нового объекта $e^{i\varphi}$.[3]

- Заметим, однако, что мнимая экспонента действительно обладает некоторыми свойствами, присущими экспоненте:

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}, \qquad \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi-\psi)}, \qquad \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

  Покажем, например, первое равенство:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi}e^{i\psi} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) = \\ &= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) = e^{i(\varphi+\psi)}. \end{aligned}$$

  Проверьте*, второе и третье равенства в (2) самостоятельно. Отдельно проверьте, что*

$$\left(e^{i\varphi}\right)^{-1} = e^{-i\varphi} \qquad \text{и} \qquad \left(e^{i\varphi}\right)^0 = e^{i0}.$$

- Мнимая экспонента как функция действительного переменного $\varphi \in \mathbb{R}$ является 2π-периодической функцией[4] в силу своего определения.

[3] А не как показательную функцию.
[4] В отличие от действительной экспоненты!

- Сделаем ещё одно замечание по поводу мнимой экспоненты. Подставляя в формулу (1) вместо φ величину $-\varphi$, получаем

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Отсюда получаются формулы

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

также известные как *формулы Эйлера*.

12. `Экспоненциальное представление комплексного числа.` Благодаря формуле Эйлера (1) мы можем перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа к *экспоненциальной*:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi},$$

где φ – аргумент числа z.

Например,

$$1 = e^{i0} = e^{2\pi i}, \qquad -1 = e^{\pi i} = e^{-\pi i}, \qquad i = e^{i\pi/2}, \quad \text{и т.д.}$$

Экспоненциальное представление комплексного числа является весьма удобным инструментом исследования. Приведем несколько простых примеров.

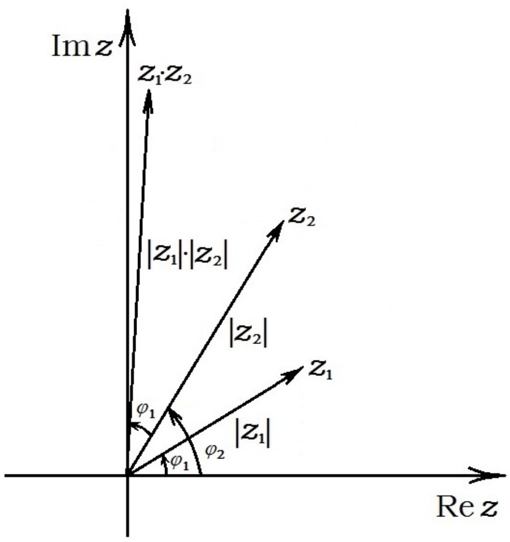
1. *Действия с комплексными числами.*

   Умножать, делить и возводить в степень комплексные числа часто удобнее в экспоненциальной форме, чем в алгебраической. Из такого представления ясен и геометрический смысл этих операций.

   Умножение комплексных чисел происходит перемножением их модулей и сложением аргументов:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

   Геометрически это соответствует растяжению радиус-вектора, например, точки z_2 в $|z_1|$ раз (или сжатию) и повороту его на угол φ_1.



Соответственно, при делении z_1 на z_2 радиус-вектор делимого укорачивается в $|z_2|$ раз и поворачивается на угол $-\varphi_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

При возведении комплексного числа z в целую положительную степень n радиус-вектор растягивается и $n-1$ раз поворачивается на угол φ:

$$z^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi}.$$

Пример. Найдём число

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

Запишем числитель в показательной форме:

$$1 + i\sqrt{3} = 2\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 2e^{i\pi/3}$$

и знаменатель:

$$1 - i = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\Big) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Тогда

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i7\pi/12}\right)^{20} = 2^{10}e^{i35\pi/3} = 2^{10}e^{i(12\pi-\pi/3)} =$$
$$= 2^{10}e^{-i\pi/3} = 2^{10}(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) = 1024\Big(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 512 - i512\sqrt{3}.$$

2. *Формула Муавра*[5].

   Очевидным образом получается из свойств степеней:

$$z^n = \big(|z|e^{i\varphi}\big)^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. **Пример.** Найдём формулы для вычисления $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$.

   Рассмотрим комплексное число $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. По формуле Муавра

$$z^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi,$$

   поэтому нам достаточно найти действительную и мнимую части числа z^5.

   По формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned} z^5 &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \\ &= \cos^5\varphi + i5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - i10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi = \\ &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\big(5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi\big). \end{aligned}$$

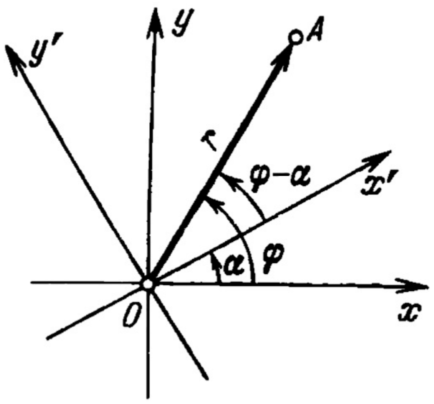
   Приравнивая действительные и мнимые части этих двух выражений, получаем:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$
$$\sin 5\varphi = \sin^5\varphi - 10\sin^3\varphi\cos^2\varphi + 5\sin\varphi\cos^4\varphi.$$

[5] Абрахам де Муавр (1667–1754) – французский и английский математик.

4. *Поворот декартовой системы координат на заданный угол α.*

   Пусть декартова система координат XOY поворотом на угол α переходит в декартову систему координат $X'OY'$. Возьмём в системе координат XOY точку $A(x;y)$ и найдём её координаты в системе $X'OY'$.



   Для этого поставим ей в соответствие комплексные числа $z = x + iy = |z|e^{i\varphi}$ и $z' = x' + iy'$. Очевидно, что $|z'| = |z|$ (обе системы координат имеют общую точку отсчёта), в то время как аргумент числа z' отличается от аргумента z на величину α:

$$z' = |z|e^{i(\varphi-\alpha)} = |z|e^{i\varphi}e^{-i\alpha} = (x+iy)e^{-i\alpha} = (x+iy)(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

   Отсюда получаем известные формулы

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

5. *Вычисление корня n-й степени из комплексного числа.*

   Корнем степени n ($n \in \mathbb{N}$) из комплексного числа a называется комплексное число z, разрешающее уравнение $z^n = a$.

   Для решения этого уравнения запишем числа a и z в экспоненциальной форме:

$$|z|^n e^{in\varphi} = |a|e^{i\alpha}.$$

   Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули и аргументы (с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Следовательно,

$$\begin{cases} |z|^n = |a| \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|} \\ \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

   Таким образом, корни n-й степени из числа a имеют вид:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

   Заметим, что различных чисел среди корней z_k ровно n (в силу 2π-периодичности функции $e^{i\varphi}$). Обычно[6] рассматривают z_k при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

   Геометрически корни n-й степени из числа a расположены на окружности с центром в нуле радиуса $\sqrt[n]{|a|}$ и образуют правильный n-угольник. При этом один из корней образует угол α/n с положительной действительной полуосью, а углы между радиус-векторами двух последовательных корней равны $2\pi/n$.

[6] но не обязательно!

13. `Ещё раз о сопряжённых числах.`

По определению, *сопряжённым* к комплексному числу $z = x + iy$ называется число $\overline{z} = x - iy$. В экспоненциальной форме оно имеет вид

$$\overline{z} = \overline{|z|e^{i\varphi}} = |z|e^{-i\varphi},$$

т.е. $|\overline{z}| = |z|$, а $\arg \overline{z} = -\arg z$.

Используя оба представления сопряжённого числа, легко доказать следующие свойства сопряжённых чисел:

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad z \cdot \overline{z} = |z|^2, \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \qquad \overline{(z^n)} = \overline{z}^{\,n},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Для действительных чисел понятие сопряжённого числа не привносит новизны: $\overline{x} = x$, поэтому в теории функций действительного переменного такое понятие не вводилось.

Последовательности комплексных чисел

Определение 2. Последовательность комплексных чисел z_n называется *сходящейся* к комплексному числу a, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\,n > N(\varepsilon) \quad |z_n - a| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \qquad \text{или} \qquad z_n \to a.$$

Другими словами, последовательность z_n сходится к a, если последовательность $|z_n - a|$ сходится к нулю.

Геометрически это означает, что все элементы последовательности, за исключением конечного их числа, лежат в ε-окрестности точки a.

Теорема 1. *Последовательность $z_n = x_n + iy_n$ сходится к числу $a = \alpha + i\beta$ тогда и только тогда, когда одновременно $x_n \to \alpha$ и $y_n \to \beta$.*

Доказательство. *Необходимость* следует из очевидных неравенств

$$|x_n - \alpha| \leqslant \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} = |z_n - a| \qquad \text{и} \qquad |y_n - \beta| \leqslant |z_n - a|.$$

Достаточность получается из оценки

$$|z_n - a| = \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} \leqslant |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|. \qquad \square$$

Доказанное свойство соответствует покоординатной сходимости последовательности векторов.

Сходимость последовательности комплексных чисел можно описать и на языке последовательностей модулей и аргументов.

Теорема 2. *Последовательность $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ сходится к числу $a = re^{i\varphi}$ тогда и только тогда, когда одновременно $r_n \to r$ и $\varphi_n \to \varphi$ (при надлежащем выборе последовательности φ_n).*

Доказательство. *Достаточность.* Из тригонометрической формы последовательности z_n и непрерывности косинуса и синуса получаем

$$z_n = r_n\cos\varphi_n + ir_n\sin\varphi_n \quad \to \quad r\cos\varphi + ir\sin\varphi = a,$$

что, в силу предыдущей теоремы, означает сходимость z_n к a.

Необходимость.

Определение 3. Последовательность $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если найдётся такое положительное число R, что все элементы последовательности лежат в круге с центром в нуле радиуса R, т.е.

$$\exists\,R > 0 \quad \forall\,n \in \mathbb{N} \quad |z_n| < R.$$

Как и в случае действительных чисел, сходящаяся последовательность ограничена, но не всякая ограниченная последовательность сходится. Справедлива

Теорема 3 (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство получается последовательным применением теоремы Больцано–Вейерштрасса к последовательностям действительных и мнимых частей последовательности z_n. $\square$

Также имеют место

- *критерий Коши* сходимости последовательности комплексных чисел, что означает *полноту* пространства $\mathbb{C}$;
- *арифметические операции* над пределами: если $z_n \to a$ и $\zeta_n \to \lambda$, то

$$z_n \pm \zeta_n \to a \pm \lambda, \qquad z_n \cdot \zeta_n \to a \cdot \lambda, \qquad \frac{z_n}{\zeta_n} \to \frac{a}{\lambda}, \text{ если } \zeta_n, \lambda \neq 0.$$

Бесконечно большие последовательности и бесконечно удалённая точка

Определение 4. Последовательность $\{z_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N(E) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N(E) \quad |z_n| > E.$$

Это обозначается

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \qquad \text{или} \qquad z_n \to \infty.$$

Другими словами, последовательность z_n бесконечно большая, если последовательность $|z_n|$ бесконечно большая.

Свойства бесконечно больших последовательностей:

1. $z_n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z_n} \to 0.$
2. $z_n \to \infty, \quad \zeta_n \to a \quad \Rightarrow \quad (z_n + \zeta_n) \to \infty.$
3. $z_n \to \infty, \quad \zeta_n \to a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z_n \cdot \zeta_n \to \infty.$
4. $z_n \to \infty, \quad \zeta_n \to a \neq \infty \quad \Rightarrow \quad z_n/\zeta_n \to \infty.$
5. $z_n \to \infty, \quad \zeta_n \to a \neq \infty \quad \Rightarrow \quad \zeta_n/z_n \to 0.$

В ряде случаев удобно рассматривать бесконечно большую последовательность как сходящуюся к некоторой точке, называемой *бесконечно удалённой точкой*; её обозначают $z = \infty$.

Точке $z = \infty$, как и точке 0, не поставлено в соответствие никакого значения аргумента, а также никакого значения действительной и мнимой частей. Модуль бесконечно удалённой точки считается равным бесконечности.

Точка $z = \infty$ не участвует в алгебраических операциях. Она является идеальным объектом, замыкающим множество $\mathbb{C}$.

Множество комплексных чисел с присоединённой к нему бесконечно удалённой точкой будем называть *замкнутым множеством комплексных чисел* и обозначать $\overline{\mathbb{C}}$.

В $\overline{\mathbb{C}}$ справедлив `принцип компактности`: *любое бесконечное подмножество* $\overline{\mathbb{C}}$ *имеет предельную точку, принадлежащую* $\overline{\mathbb{C}}$.

Стереографическая проекция

Для геометрической интерпретации $\overline{\mathbb{C}}$ удобно использовать сферическое изображение. Для этого в трёхмерном пространстве введём декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$ и наложим на плоскость $O\xi\eta$ комплексную плоскость, так что действительная ось Ox совпадает с $O\xi$, а мнимая ось Oy – с осью $O\eta$.

Рассмотрим сферу S: $\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2 = 1$. Она касается комплексной плоскости в начале координат. Возьмём на комплексной плоскости произвольную точку $z = (x, y)$ и поставим ей в соответствие точку $M(\xi;\eta;\zeta)$ пересечения отрезка прямой, соединяющей точку z с «северным полюсом» сферы $N(0; 0; 2)$.

Такое соответствие

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \to \quad M(\xi;\eta;\zeta) \in S$$

называется *стереографической проекцией*, сферу S называют *сферой Римана*.

Уравнение прямой Nz:

$$Nz = N + t \cdot \overrightarrow{Nz} = (0; 0; 2) + t(x; y; -2) = (tx; ty; 2 - 2t).$$

Подставляя эти уравнения в уравнение сферы, найдём значение параметра, соответствующее точке пересечения прямой и сферы:

$$t = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4},$$

и уравнения стереографической проекции (координаты точки M):

$$\xi = \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \qquad \eta = \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \qquad \zeta = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4}. \tag{3}$$

Эти функции обратимы: из последнего уравнения получаем $x^2 + y^2 + 4 = \frac{8}{2-\zeta}$, тогда

$$x = \frac{2\xi}{2 - \zeta}, \qquad y = \frac{2\eta}{2 - \zeta}. \tag{4}$$

Таким образом, уравнения (3) и (4) устанавливают взаимно однозначное соответствие комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и сферы с выколотым северным полюсом $S \backslash N$.

Поставим в соответствие точке N бесконечно удалённую точку комплексной плоскости $z = \infty$, тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие $\overline{\mathbb{C}}$ и S. Комплексную плоскость с присоединённой к ней бесконечно удалённой точкой называют *расширенной комплексной плоскостью*.

Теперь сходимость последовательности z_n к бесконечно удалённой точке можно представлять как сходимость последовательности стереографических образов M_n к полюсу N на сфере Римана.

На плоскости расстояние между точками измеряется в *евклидовой метрике*

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Можно ввести ещё одну метрику – *сферическую*, равную расстоянию между образами этих точек на сфере в евклидовой метрике в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Функции комплексного переменного

Множества и области

Определение 5. Точка a называется

внутренней точкой множества D, если она лежит в этом множестве с некоторой своей ε-окрестностью;

внешней точкой множества D, если она с некоторой своей ε-окрестностью лежит в дополнении множества D;

граничной точкой множества D, если в любой её окрестности присутствуют точки как из множества D, так и из его дополнения.

Совокупность всех граничных точек множества D называется *границей* множества D и обозначается ∂D. Граница множества D по умолчанию считается *ориентированной положительно* (относительно множества D), что означает, что при движении вдоль ∂D в направлении роста параметра множество D остаётся слева.

Определение 6. Множество D называется

открытым, если любая его точка – внутренняя;

связным, если любые две точки множества D можно соединить кривой, целиком лежащей в D.

Областью называется связное открытое множество.

Область с присоединённой к ней границей называется *замкнутой областью*; обозначается $\overline{G}$: $\overline{G} = G \cup \partial G$.

Область G комплексной плоскости называется *односвязной*, если любая замкнутая кривая, лежащая в G, ограничивает только точки множества G.[7]

Область G расширенной комплексной плоскости называется *односвязной*, если любую замкнутую кривую, лежащую в G, можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области G; если при этом деформация проходит через бесконечно удалённую точку, то её нужно рассматривать на сфере Римана.

Определение функции комплексного переменного

Определение 7. Пусть каждой точке z множества D (расширенной) комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ поставлено в соответствие комплексное (быть может, бесконечное) число w. В этом случае говорят, что на множестве D определена *функция комплексного переменного* и обозначают $w = f(z)$, $z \in D$.

Если при таком отображении каждому $z \in D$ соответствует только одно число w, то функция f называется *однозначной*.

Множество значений E однозначной функции f есть совокупность всех w вида $w = f(z)$, $z \in D$.

Определение 8. Однозначная функция $w = f(z)$ называется *однолистной* на множестве D, если в разных точках множества D она принимает разные значения:

$$\forall\, z_1, z_2 \in D, \quad z_1 \neq z_2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = f(z_1) \neq w_2 = f(z_2).$$

[7] Другое определение: если любую замкнутую кривую, лежащую в G, можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области G.

При однолистном отображении множества D на множество E каждой точке $z \in D$ поставлена в соответствие единственная точка $w \in E$ и каждая точка $w \in E$ имеет только один прообраз $z \in D$. Т.е. однолистная функция осуществляет *взаимно-однозначное отображение* между множествами D и E.

Это, в свою очередь, означает, что на множестве E определена *обратная функция* $z = f^{-1}(w)$:

$$z = f^{-1}(f(z)), \quad z \in D, \qquad w = f(f^{-1}(w)), \quad w \in E.$$

Если $w = f(z)$ отображает D на E однолистным образом, и функция $\zeta = g(w)$ однолистно отображает E на G, то суперпозиция $\zeta = h(z) = g(f(z))$ отображает D на G однолистным образом.

Для удобства исследования функции, у неё выделяют действительную и мнимую части. Пусть функция f ставит в соответствие комплексному числу $z = x + iy$ комплексное число $w = u + iv$. Изменяя z (т.е. меняя x и y), мы получим соответствующие значения w (т.е. соответствующие значения u и v). Тем самым определяются две функции

$$u = u(x; y) \quad \text{и} \quad v = v(x; y),$$

а комплекснозначную функцию $w = f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = u(x; y) + iv(x; y).$$

Функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ определены на соответствующем множестве $\widetilde{D}$ действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ и называются *действительной* и *мнимой частями функции* f:

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x; y), \qquad \operatorname{Im} f(z) = v(x; y).$$

Далее по умолчанию рассматриваются однозначные функции. При рассмотрении многозначных функций это будет оговорено специально.

Предел функции и непрерывность

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве D и z_0 – предельная точка[8] множества D ($z_0 \in D'$).

Определение 9. Комплексное число a называется *пределом функции $f(z)$ в точке z_0*, если

(определение Гейне) $\forall \{z_n\} \subset D,\ z_n \neq z_0,\ z_n \to z_0 \ \Rightarrow\ f(z_n) \to a;$

(определение Коши) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall z \in D,\ 0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(z) - a| < \varepsilon.$

Это обозначают

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \qquad \text{или} \qquad f(z) \to a \ \text{ при } z \to z_0.$$

- Определения Коши и Гейне эквивалентны.

[8]Точка z_0 называется *предельной* точкой множества D, если любая её проколотая окрестность содержит хотя бы одну точку множества D.

- Критерий существования предела функции:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x;y) = \operatorname{Re} a \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x;y) = \operatorname{Im} a \end{cases}$$

- Арифметические операции над пределами.

Определение 10. Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in D$, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция *непрерывна на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ непрерывны в точке $(x_0;y_0)$.

Как и для функций действительного переменного, сумма, произведение, отношение, суперпозиция непрерывных функций комплексной переменной непрерывны.

Дифференцируемость

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве D и z_0 – внутренняя точка множества D.

Определение 11. *Производной функции* $f(z)$ *в точке* z_0 называется предел разностного отношения

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

Определение 12. Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0, если существуют комплексное число $A + iB$ и функция $\varepsilon(\Delta z)$ такие, что

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = (A+iB)\Delta z + \varepsilon(\Delta z), \tag{5}$$

где $\varepsilon(\Delta z) = o(\rho)$[9] при $\rho = |\Delta z| \to 0$.

Как и в случае действительного переменного,

Теорема 4. *Функция комплексного переменного $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(z_0)$.*

Доказательство. Действительно, если $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то, поделив равенство (5) на Δz и переходя к пределу при $\Delta z \to 0$, получим

$$\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = A + iB + \frac{\varepsilon(\Delta z)}{\Delta z} \to A + iB.$$

Отсюда, в частности, следует, что $f'(z_0) = A + iB$.

[9]Как и прежде, $o(\rho)$ – обозначение величины более высокого порядка малости по сравнению с ρ, т.е. $\varepsilon(\Delta z) = o(\rho) \Leftrightarrow \varepsilon(\Delta z)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$.

Обратно, если $f'(z_0)$ – предел разностного отношения, то величина

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)$$

является бесконечно малой при $\Delta z\to 0$. Следовательно, функция

$$\varepsilon(\Delta z):=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)-f'(z_0)\cdot\Delta z$$

является $o(\rho)$, откуда следует равенство (5) с $A+iB=f'(z_0)$. □

Существование производной функции комплексного переменного налагает особые требования на её действительную и мнимую части, выражаемые равенствами, называемыми уравнениями Коши-Римана[10]. При выполнении этих условий функция оказывается бесконечно дифференцируемой.

Теорема 5. *Функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы в точке $(x_0;y_0)$ и в этой точке выполнены условия Коши-Римана*

$$\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial y},\qquad \frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial x}. \tag{6}$$

Доказательство. *Необходимость.* Заметим сначала, что функция $\varepsilon(\Delta z)$ в определении дифференцируемости (5), как и всякая функция комплексного переменного, имеет свою действительную и мнимую части:

$$\varepsilon(\Delta z)=\alpha(\Delta x;\Delta y)+i\beta(\Delta x;\Delta y),\qquad \text{где}\ \ \Delta z=\Delta x+i\Delta y.$$

Выпишем теперь действительную и мнимую части равенства (5):

$$\begin{aligned} u(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-u(x_0;y_0)&=A\Delta x-B\Delta y+\alpha(\Delta x;\Delta y),\\ v(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-v(x_0;y_0)&=B\Delta x+A\Delta y+\beta(\Delta x;\Delta y). \end{aligned} \tag{7}$$

Из свойства $\varepsilon(\Delta z)=o(\rho)$ и неравенств

$$|\,\alpha(x;y)|=|\operatorname{Re}\varepsilon(z)|\leqslant|\,\varepsilon(z)|,\qquad |\,\beta(x;y)|=|\operatorname{Im}\varepsilon(z)|\leqslant|\,\varepsilon(z)|,$$

следует, что $\alpha(\Delta x;\Delta y)=o(\rho)$ и $\beta(\Delta x;\Delta y)=o(\rho)$. В таком случае равенства (7) служат определениями дифференцируемости функций u и v в точке $(x_0;y_0)$, причём

$$A=\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial y},\qquad B=-\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial y}=\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial x}.$$

Достаточность. По определению дифференцируемости функций u и v в точке $(x_0;y_0)$

$$\begin{aligned} u(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-u(x_0;y_0)&=\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x;\Delta y),\\ v(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-v(x_0;y_0)&=\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial y}\Delta y+\beta(\Delta x;\Delta y), \end{aligned}$$

[10] Иногда их называют уравнениями Даламбера-Эйлера.

где $\alpha(\Delta x; \Delta y) = o(\rho)$ и $\beta(\Delta x; \Delta y) = o(\rho)$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Сложим эти уравнения, умножая второе на мнимую единицу:

$$u(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - (u(x_0; y_0) + iv(x_0; y_0)) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x} i\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} i\Delta y + i\beta(\Delta x; \Delta y).$$

В левой части равенства получили приращение функции $f(z)$. В правой части, используя условия Коши-Римана, заменим, например, $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ на $-\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y} i\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} i\Delta y + i\beta(\Delta x; \Delta y) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta x + i\Delta y) + \alpha(\Delta x; \Delta y) + i\beta(\Delta x; \Delta y) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta z + \varepsilon(\Delta z), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(\Delta z)$ обозначена функция $\alpha(\Delta x; \Delta y) + i\beta(\Delta x; \Delta y)$, являющаяся $o(\rho)$.

Итак, мы показали, что приращение функции $f(z)$ в точке z_0 представимо в форме (5), что служит определением дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z_0. □

Следствие 1. *В частности, при доказательстве достаточности мы нашли формулу для вычисления производной функции $f(z)$:*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

В силу условий Коши-Римана её можно записать следующим образом:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следствие 2. *Другие формы записи условий Коши-Римана.*

Если выразить функцию $f(z)$ через полярные координаты:

$$f(z) = u(x; y) + iv(x; y) = u(r\cos\varphi; r\sin\varphi) + iv(r\cos\varphi; r\sin\varphi) = U(r; \varphi) + iV(r; \varphi),$$

то условия Коши-Римана принимают вид:

$$\frac{\partial U(r; \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V(r; \varphi)}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial U(r; \varphi)}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial V(r; \varphi)}{\partial r}. \tag{8}$$

Если записать функцию $f(z)$ в экспоненциальной форме: $f(z) = R(x; y)e^{i\Phi(x;y)}$, то условия Коши-Римана принимают вид:

$$\frac{\partial R(x; y)}{\partial x} = R\frac{\partial \Phi(x; y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R(x; y)}{\partial y} = -R\frac{\partial \Phi(x; y)}{\partial x}.$$

Следствие 3. *Пусть $\overline{s}$ и $\overline{n}$ – ортогональные единичные вектора на комплексной плоскости. Будем считать, что поворот от $\overline{s}$ к $\overline{n}$ против часовой стрелки.*

Если функция $f(z)$ дифференцируема, то её производная может быть вычислена по любому направлению (при $\Delta z \to 0$ по любому направлению). Тогда, полагая $\Delta z = |\Delta z| \cdot \overline{s}$, получаем:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta u(x; y)}{|\Delta z|\overline{s}} + i\frac{\Delta v(x; y)}{|\Delta z|\overline{s}} = \frac{1}{\overline{s}} \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta u(x; y)}{|\Delta z|} + i\frac{\Delta v(x; y)}{|\Delta z|},$$

где приращения $\Delta u(x;y)$, $\Delta v(x;y)$ получены в направлении вектора $\overline{s}$, следовательно,

$$f'(z) = \frac{1}{\overline{s}} \left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial \overline{s}} + i \frac{\partial v(x;y)}{\partial \overline{s}} \right).$$

Аналогично,

$$f'(z) = \frac{1}{\overline{n}} \left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial \overline{n}} + i \frac{\partial v(x;y)}{\partial \overline{n}} \right).$$

Сравнивая действительные и мнимые части этих равенств и учитывая, что $\overline{n} = i\overline{s}$, получаем обобщённые условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x;y)}{\partial \overline{s}} = \frac{\partial v(x;y)}{\partial \overline{n}}, \qquad \frac{\partial u(x;y)}{\partial \overline{n}} = -\frac{\partial v(x;y)}{\partial \overline{s}}.$$

В частности, полагая $\overline{s} = (1;0)$ и $\overline{n} = (0;1)$, получим классические условия (6).

Пример 1. Исследуем функцию $f(z) = \overline{z}^2$ на дифференцируемость.

$$f(z) = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy, \qquad \text{т.е.} \quad u(x;y) = x^2 - y^2, \quad v(x;y) = -2xy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Все производные непрерывны, однако условия Коши-Римана выполнены только в нуле, следовательно, функция $f(z) = \overline{z}^2$ дифференцируема только в точке $z = 0$.

Легко видеть, что функция $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ дифференцируема во всех точках комплексной плоскости, причём

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z.$$

Аналитические функции

По-прежнему, если это не оговорено специально, мы имеем дело с однозначной функцией $w = f(z)$.

Определение 13. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* G, если она обладает непрерывной производной в этой области.

Необходимым и достаточным условием аналитичности функции $f(z)$ в области $G \subseteq \mathbb{C}$ является непрерывность частных производных функций $u(x; y)$ и $v(x; y)$ в соответствующей области $\widetilde{G} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Данное определение аналитической функции отличается от общепринятого дополнительным требованием непрерывности производной. Это сделано для упрощения изложения. Такое ограничение не является принципиальным с точки зрения математики, поскольку далее будет доказано, что аналитическая в некоторой области функция является бесконечно дифференцируемой в этой области. Полное изложение теории аналитических функций можно найти в обширной литературе.

Некоторые замечания по поводу аналитических функций

1. `Операции над аналитическими функциями.`

Сумма и *произведение* аналитических функций в области G суть функции, аналитические в G.

Отношение аналитических функций является аналитической функцией, если знаменатель не обращается в ноль.

Суперпозиция аналитических функций является аналитической функцией: если $w = f(z)$ – функция, аналитическая в области G, и $z = \phi(\zeta)$ – аналитическая из области Ω в G, то сложная функция $w = F(\zeta) := f(\phi(\zeta))$ аналитична в Ω.[11]

2. `Существование обратной функции.`

Пусть на множестве D определена функция $w = f(z)$ и пусть E – множество всех её значений. Это означает, что каждому $w \in E$ соответствует одно или несколько чисел $z \in D$, таких, что $f(z) = w$. Тем самым на множестве E оказывается задана функция, которая каждому $w \in E$ ставит в соответствие одно или несколько чисел $z \in D$ – решений уравнения

$$w = f(z). \tag{9}$$

Эту функцию, переводящую E в D (однозначную или многозначную), называют *обратной* к функции $w = f(z)$ и обозначают $z = f^{-1}(w)$.

По определению обратной функции, справедливо тождество

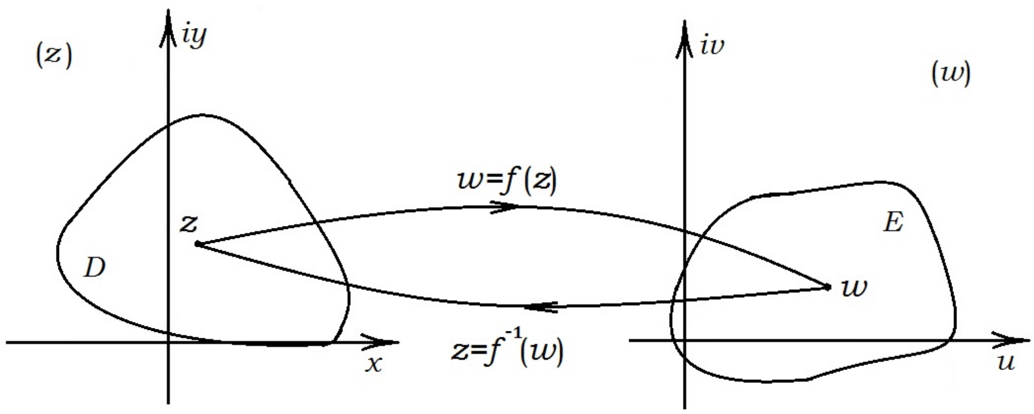
$$f(f^{-1}(w)) \equiv w, \quad w \in E.$$

Обратное тождество

$$f^{-1}(f(z)) \equiv z, \quad z \in D,$$

имеет место лишь при условии однозначности обратной функции $f^{-1}(w)$ (или однолистности прямой функции $f(z)$).

[11] Подумайте, как бы вы это доказали?



Теорема 6. *Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $B_\varepsilon(w_0)$ точки w_0 определена функция $z = f^{-1}(w)$, взаимно-однозначно отображающая $B_\varepsilon(w_0)$ на $B_\delta(z_0)$, обратная к функции $w = f(z)$ и аналитическая, причём*

$$\left(f^{-1}(w)\right)' = \frac{1}{f'(z)}, \qquad w \in B_\varepsilon(w_0), \quad z \in B_\delta(z_0).$$

Доказательство. Уравнение, задающее функцию комплексного переменного, равносильно системе уравнений для действительной и мнимой частей

$$w = f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = u(x;y) \\ v = v(x;y) \end{cases} \tag{10}$$

поэтому вопрос о существовании и свойствах обратной функции сводится к вопросу о разрешимости данной системы и свойствам её решений.

Согласно теореме о существовании функций, задаваемых системой уравнений, если функции системы (10) непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0; u_0; v_0)$, обращаются в верные равенства в точке $(x_0; y_0; u_0; v_0)$, а якобиан этой системы $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ не равен нулю в точке $(x_0; y_0; u_0; v_0)$, то найдутся такие окрестности $B(z_0)$ и $B(w_0)$ точек $(x_0; y_0)$ и $(u_0; v_0)$ соответственно, что для любой точки $(u; v) \in B(w_0)$ найдётся единственное решение системы (10)

$$x = x(u; v), \quad y = y(u; v), \qquad (x; y) \in B(z_0),$$

причём функции $x(u; v)$ и $y(u; v)$ непрерывно дифференцируемы в $B(w_0)$ и $x(u_0; v_0) = x_0$ и $y(u_0; v_0) = y_0$.

Аналитичность функции $f(z)$ подразумевает непрерывную дифференцируемость действительной и мнимой частей функции $f(z)$. Из условий Коши-Римана получаем

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x \cdot v'_y - u'_y \cdot v'_x = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы о существовании, единственности и дифференцируемости решений системы (10) и тем самым определена обратная функция

$$z = x + iy = x(u; v) + iy(u; v) = f^{-1}(w), \quad w \in B(w_0).$$

Найдём её производную:

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \lim_{\Delta w\to 0} \frac{f^{-1}(w+\Delta w) - f^{-1}(w)}{\Delta w} = \left[\begin{array}{c} f^{-1}(w) = z,\ f^{-1}(w+\Delta w) = z' \\ \Delta w = f(z') - f(z) \end{array} \right] =$$
$$= \lim_{z'\to z} \frac{z'-z}{f(z')-f(z)} = \lim_{z'\to z} \frac{1}{\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}} = \frac{1}{f'(z)}. \qquad \square$$

3. `Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части.` *По заданной действительной или мнимой части аналитической функции можно восстановить всю функцию с точностью до константы.*

Пусть известна функция $u(x;y)$ – действительная часть некоторой аналитической функции $f(z)$. Используя условия Коши-Римана (6), выпишем дифференциал её мнимой части – функции $v(x;y)$:

$$dv(x;y) = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Отсюда функция $v(x;y)$ восстанавливается с точностью до произвольной постоянной, а вместе с ней и функция $f(z)$.

Таким же образом можно поступать, если известна $\operatorname{Im} f(z) = v(x;y)$.

Функция u (или v) может быть задана как функция переменных r и φ. В этом случае для нахождения аналитической функции $f(z)$ следует использовать уравнения Коши-Римана в форме (8).

Пример 2. Пусть $v(x;y) = y\cos y \operatorname{sh} x + x\sin y \operatorname{ch} x$. Из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -y\cos y\operatorname{ch} x - \sin y \operatorname{ch} x - x\sin y\operatorname{sh} x$$

находим функцию $u(x;y)$ с точностью до неизвестной функции переменной x:

$$\begin{aligned} u(x;y) = &- \int (y\cos y\operatorname{ch} x + \sin y\operatorname{ch} x + x\sin y\operatorname{sh} x)\,dy = \\ &= -\,(y\sin y + \cos y)\operatorname{ch} x + \cos y\operatorname{ch} x + x\cos y\operatorname{sh} x + C(x) = \\ &= -\,y\sin y\operatorname{ch} x + x\cos y\operatorname{sh} x + C(x). \end{aligned}$$

Из второго уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\,y\sin y\operatorname{sh} x + \cos y\operatorname{sh} x + x\cos y\operatorname{ch} x + C'(x) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} = \cos y\operatorname{sh} x - y\sin y\operatorname{sh} x + x\cos y\operatorname{ch} x \end{aligned}$$

находим, что $C'(x) = 0$, т.е. $C(x) \equiv const$. Отсюда

$$\begin{aligned} f(z) &= -\,y\sin y\operatorname{ch} x + x\cos y\operatorname{sh} x + C + i(y\cos y\operatorname{sh} x + x\sin y\operatorname{ch} x) = \\ &= z\cos y\operatorname{sh} x + iz\sin y\operatorname{ch} x + C = z(\operatorname{sh} x\cos y + i\operatorname{ch} x\sin y) + C \\ &= z\operatorname{sh} z + C. \end{aligned}$$

Найдите *аналитическую функцию $f(z) = U(r;\varphi) + iV(r;\varphi)$, если*

$$U(r;\varphi) = r\varphi\cos\varphi + r\ln r\sin\varphi.$$

4. `Сопряжённые гармонические функции.`

Определение 14. Если функция $u(x;y)$, определённая в некоторой области $\widetilde{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ и имеющая там непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\Delta u(x;y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x;y) \in \widetilde{G},$$

то её называют *гармонической в области* $\widetilde{G}$.

Две гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана, называют *сопряжёнными.*

Действительная и мнимая части аналитической функции являются сопряжёнными гармоническими функциями.

Покажем это.

Поскольку (как будет доказано ниже) аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой, её действительная и мнимая части также бесконечно дифференцируемы. В частности, они имеют непрерывные производные второго порядка.

Из условий Коши-Римана для функции $u(x;y)$ получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Из курса математического анализа известно, что непрерывные смешанные производные совпадают, следовательно, функция $u(x;y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Аналогично доказывается, что и функция $v(x;y)$ является гармонической.

Пример 3. Выясним, существует ли аналитическая функция, действительная часть которой $u(x;y) = \frac{x^2}{x+y}$.

Если такая аналитическая функция $f(z)$ существует, то функция $u(x;y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{x^2+2xy}{(x+y)^2}\right)'_x = \frac{(2x+2y)(x+y)^2 - 2(x+y)(x^2+2xy)}{(x+y)^4} = \frac{2y^2}{(x+y)^3},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\left(\frac{-1}{(x+y)^2}\right)'_y = \frac{2x^2}{(x+y)^3}.$$

Мы видим, что сумма производных не обращается в ноль ни в какой области, следовательно, данная функция не является действительной частью какой-либо аналитической функции.

5. `Линии уровня сопряжённых гармонических функций ортогональны.`

Или, в другой формулировке: *семейства линий уровня действительной и мнимой частей аналитической функции ортогональны.*

Действительно, мы знаем из курса математического анализа, что градиент скалярного поля ортогонален линии уровня этого поля, т.е.

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}\right) \perp \{u(x;y) = C\}, \qquad \operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y}\right) \perp \{v(x;y) = C\}.$$

В свою очередь из условий Коши-Римана следует, что градиенты действительной и мнимой частей аналитической функции тоже ортогональны друг другу:

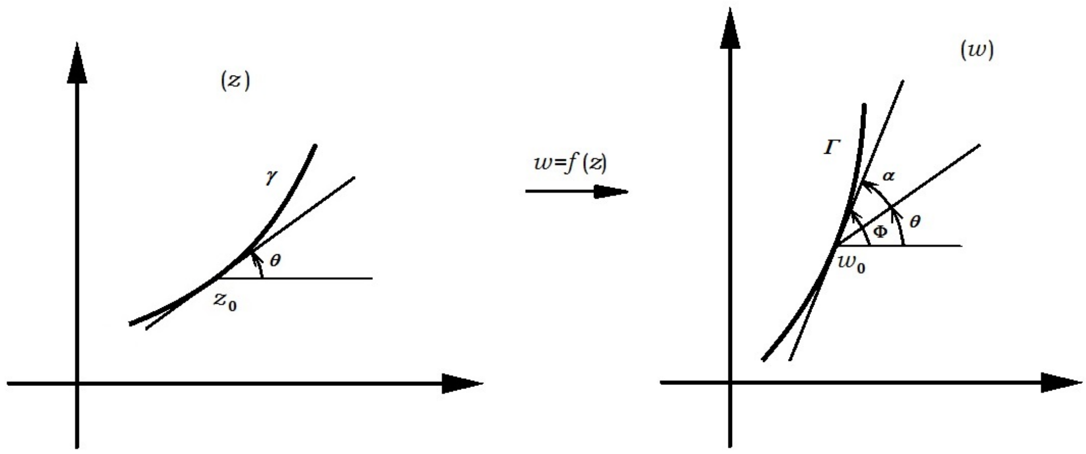
$$(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, линии семейства $\{u(x;y) = C\}$ ортогональны линиям семейства $\{v(x;y) = C\}$ (тем, с которыми они пересекаются).

Геометрический смысл производной

Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в некоторой окрестности Ω точки z_0 и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим производную:

$$f'(z_0) = ke^{i\alpha} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \cdot e^{i(\arg \Delta w - \arg \Delta z)}.$$



Проведём через точку z_0 гладкую кривую γ, $\gamma \subset \Omega$. Пусть Γ – её образ, проходящий через точку $w_0 = f(z_0)$ – также гладкая кривая. Возьмём на кривой γ точку $z = z_0 + \Delta z$ и устремим её к z_0 вдоль γ. В силу гладкости кривой угол наклона секущей Δz устремится к углу θ наклона касательной в точке z_0. При этом в силу непрерывности отображения, то же самой будет происходить в окрестности точки w_0: образ w точки z будет приближаться к w_0 вдоль кривой Γ, а угол наклона секущей $\Delta w = w - w_0$ устремится к углу Φ наклона касательной в точке w_0:

$$\theta = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z, \qquad \Phi = \lim_{\Delta w \to 0} \arg \Delta w.$$

Тогда

$$\alpha = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \Phi - \theta.$$

Это означает, что кривая γ, проходящая через точку z_0 под углом θ, после отображения в плоскость w поворачивается на угол α и проходит через точку w_0 под углом $\Phi = \theta + \alpha$.

Другими словами, отображение, осуществляемое функцией f, переводит гладкую кривую в гладкую кривую и при этом все кривые, проходящие через точку z_0, поворачивает в этой точке[12] на один и тот же угол α.

[12] В другой точке z_1 оно повернёт все кривые на другой угол $\beta = \arg f'(z_1)$.

Отсюда в том числе следует, что это отображение *сохраняет углы между кривыми в точке* z_0: если две кривые пересекаются в точке z_0 под некоторым углом, то после поворота каждой из кривых на один и тот же угол α угол между ними не изменится.

Обсудим геометрический смысл модуля производной. Из соотношения

$$k = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|,$$

отбрасывая бесконечно малые порядка выше первого, получаем

$$|\Delta w| \approx k |\Delta z|,$$

это означает, что малые линейные элементы в точке z_0 преобразуются подобным образом, и k является коэффициентов подобия при этом преобразовании. В частности, окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса ρ отображается в окружность с центром в точке w_0 радиуса $k\rho$.

Величина $|f'(z_0)|$ называется *линейным растяжением кривой в точке* z_0 при отображении $w = f(z)$. Оно не зависит от вида и направления кривой, проходящей через точку z_0, и определяется только функцией, осуществляющей этот отображение.

Это свойство называется *свойством постоянства растяжений в точке* z_0.

Определение 15. Отображение окрестности точки z_0, обладающее свойствами постоянства растяжений и сохраняющее углы между кривыми в этой точке, называется *конформным отображением в точке* z_0.

Из определения конформного отображения следует, что треугольник с вершиной в точке z_0 отображается в подобный треугольник с вершиной в точке w_0.

Итак, функция, аналитическая в окрестности точки z_0, осуществляет в этой точке конформное отображение.

Интеграл от функции комплексного переменного

Кривые в комплексной плоскости

Кривой Γ на комплексной плоскости называется непрерывное[13] отображение отрезка $[\alpha;\beta] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ (или в $\overline{\mathbb{C}}$):

$$z = \sigma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha;\beta], \tag{11}$$

при этом t называется *параметром*, а уравнение (11) – *параметрическим уравнением кривой* Γ.

Точки на кривой упорядочены[14] в направлении роста параметра: если $t_1 < t_2$, то говорят, что точка $z_1 = \sigma(t_1)$ *предшествует точке* $z_2 = \sigma(t_2)$, а точка z_2 *следует за точкой* z_1. Точка $A = \sigma(\alpha)$ называется *начальной точкой кривой* Γ, точка $B = \sigma(\beta)$ – *конечной точкой* Γ.

Направление движения вдоль кривой, соответствующее росту параметра, называется *положительным*, а противоположное – *отрицательным*.

Направление движения по кривой можно сменить, вводя, например, новый параметр $\tau = -t$:

$$z = \sigma(-\tau), \quad \tau \in [-\beta;-\alpha].$$

При этом начальной становится точка $\sigma(\beta) = B$, а конечной – точка $\sigma(\alpha) = A$. Кривую Γ, пробегаемую в обратном направлении, будем обозначать Γ^-.

Одну и ту же кривую можно параметризовать разными способами, например, уравнения

$$z = \sigma_1(t) = \cos t + i\sin t, \quad t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \quad \text{и} \quad z = \sigma_2(t) = \sqrt{1-t^2} + it, \quad t \in [-1;1],$$

задают правую полуокружность единичного радиуса с центром в нуле.

Мы будем говорить, что кривые Γ: $z = \sigma(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, и γ: $z = \zeta(\tau)$, $\tau \in [a;b]$, *совпадают*, если найдётся непрерывная действительная функция $t = \upsilon(\tau)$, монотонно отображающая отрезок $[a;b]$ на отрезок $[\alpha;\beta]$ и такая, что $\sigma(\upsilon(\tau)) = \zeta(\tau)$.

Если начальная и конечная точки кривой совпадают, то она называется *замкнутой*.

Если разным точкам кривой соответствует одна точка комплексной плоскости, т.е. точки $z_1 = \sigma(t_1)$ и $z_2 = \sigma(t_2)$ совпадают при $t_1 \neq t_2$, то их называют *точками самопересечения* кривой. Исключение составляют начальная и конечная точка кривой: даже если они совпадают (как у замкнутой кривой), они не считаются точками самопересечения.

Кривая Γ называется *простой*, если она не имеет точек самопересечения.

Кривая называется *гладкой*, если функция $\sigma(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$ и $\sigma'(t) \neq 0$, причём, если кривая замкнута, то производные в точках α и β должны совпадать. Это означает, что функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные на $[\alpha;\beta]$, не обращающиеся в ноль одновременно, а для замкнутой кривой дополнительно выполняется $x'_+(\alpha) = x'_-(\beta)$ и $y'_+(\alpha) = y'_-(\beta)$.

Если кривую можно разбить на конечное число гладких кривых, то её называют *кусочно-гладкой*.

Простую замкнутую кусочно-гладкую кривую будем называть *замкнутым контуром*.

Кривую Γ, задаваемую условиями

$$z = \sigma(t), \quad t \geqslant \alpha, \quad \lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = \infty,$$

[13]Непрерывность комплекснозначной функции $\sigma(t)$ действительного переменного t является частным случаем непрерывности функции комплексного переменного и означает непрерывность её действительной и мнимой частей – функций $x(t)$ и $y(t)$.

[14]В отличие от всего множества комплексных чисел.

будем называть *неограниченной кривой*. Неограниченная кривая также может быть определена на луче $(-\infty; \alpha]$, на бесконечном интервале $(-\infty; \infty)$, на полуинтервалах $[\alpha; \beta)$ или $(\alpha; \beta]$. Неограниченная кривая называется кусочно-гладкой, если она является кусочно-гладкой на любом конечном промежутке.

Интеграл от функции комплексной переменной

Здесь и в дальнейшем все кривые предполагаются кусочно-гладкими.

Пусть на кривой $\Gamma = \{z = \sigma(t),\ t \in [\alpha; \beta]\}$ определена функция $f(z)$.

Разобьём кривую на частичные дуги точками $z_0 = \sigma(\alpha)$, $z_1 = \sigma(t_1)$, $\ldots$, $z_{n-1} = \sigma(t_{n-1})$, $z_n = \sigma(\beta)$, где $t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$.

Обозначим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Длину наибольшего отрезка между двумя соседними точками z_{k-1} и z_k назовём *диаметром разбиения*: $d = \max_k |\Delta z_k|$.

На каждой частичной дуге между точками z_{k-1} и z_k возьмём произвольную точку z_k^* и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \Delta z_k,$$

называемую *интегральной суммой* для функции $f(z)$ по кривой Γ. Понятно, что значение этой суммы определяется тем, каким способом мы разбили кривую на частичные дуги, а также тем, в каких точках вычисляются значения функции $f(z)$.

Если существует (конечный) предел интегральных сумм, не зависящий от способа разбиения кривой Γ на частичные дуги и от выбора точек z_k^*, то он называется *интегралом от функции $f(z)$ по кривой* Γ и обозначается

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \qquad \text{или} \qquad \oint_\Gamma f(z)\, dz$$

для незамкнутой или замкнутой кривой, соответственно.

Пример 4. Вычислим по определению интеграл от функции $f(z) = 1$ по произвольной (кусочно-гладкой) кривой Γ, соединяющей точки a и b ($a, b \in \mathbb{C}$):

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta z_k = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 = b - a,$$

т.е. значение интеграла зависит только от конечных точек и не зависит от кривой, их соединяющей:

$$\int_\Gamma 1\, dz = b - a.$$

Интегралы такого типа (не зависящие от кривой, соединяющей точки a и b) можно записывать в виде

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z)\, dz.$$

Свойства интегралов

1. Связь с криволинейными интегралами от функций действительного переменного. Пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$. Пусть далее $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ и $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \big(u(x_k^*;y_k^*) + iv(x_k^*;y_k^*)\big)\big(\Delta x_k + i\Delta y_k\big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \big(u(x_k^*;y_k^*)\Delta x_k - v(x_k^*;y_k^*)\Delta y_k\big) + i\sum_{k=1}^{n} \big(v(x_k^*;y_k^*)\Delta x_k + u(x_k^*;y_k^*)\Delta y_k\big).$$

Переходя к пределу при $\max|\Delta z_k| \to 0$, получаем

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\smile{AB}} u(x;y)\,dx - v(x;y)\,dy + i\int_{\smile{AB}} v(x;y)\,dx + u(x;y)\,dy. \tag{12}$$

Таким образом, существование интеграла по кривой Γ от функции $f(z)$ равносильно существованию двух интегралов второго рода от действительной и мнимой частей функции $f(z)$.

Равенство (12) позволяет перенести некоторые свойства криволинейных интегралов на интегралы от функции комплексного переменного.

2. Линейность.

$$\int_\Gamma \big(af(z) + bg(z)\big)\,dz = a\int_\Gamma f(z)\,dz + b\int_\Gamma g(z)\,dz.$$

3. Аддитивность по области. Если кривые Γ_1 и Γ_2 не имеют общих точек, кроме, быть может, конечных, то

$$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

4. Смена направления. При смене направления движения по кривой интеграл меняет знак:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)\,dz.$$

5. Оценка модуля интеграла.

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{\smile{AB}} |f(z)|\cdot|dz| = \int_{\smile{AB}} |f(z)|\,dl,$$

поскольку $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dl$. Таким образом, модуль интеграла от функции комплексной переменной не превосходит интеграла по длине дуги (криволинейного интеграла первого рода) от модуля функции.

6. Формула вычисления. Пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ и

$$\Gamma:\ z = \sigma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha;\beta].$$

Из представления (12) и формулы вычисления криволинейных интегралов второго рода получаем:

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz &= \int_{\smile{AB}} u(x;y)\,dx - v(x;y)\,dy + i\int_{\smile{AB}} v(x;y)\,dx + u(x;y)\,dy = \\
&= \int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t))x'(t) - v(x(t);y(t))y'(t)\big)\,dt + i\int_\alpha^\beta \big(v(x(t);y(t))x'(t) + u(x(t);y(t))y'(t)\big)\,dt = \\
&= \int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t)) + iv(x(t);y(t))\big)x'(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t)) + iv(x(t);y(t))\big)y'(t)\,dt = \\
&= \int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t)) + iv(x(t);y(t))\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Пример 5. Вычислим интеграл

$$\oint_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0}, \qquad (14)$$

где C_ρ – окружность с центром в точке z_0 радиуса ρ. Параметризуем её следующим образом:

$$C_\rho: \ \ z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

Тогда по формуле (13)

$$\oint_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}\,d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i.$$

Мы получили интересный результат: интеграл по окружности, проведённой вокруг точки z_0, от функции $\frac{1}{z-z_0}$ не зависит от радиуса окружности. Отметим это свойство интеграла (14), мы о нём ещё не раз вспомним.

Интегралы от аналитических функций

Мы переходим к исследованию свойств интегралов от аналитических функций. Они являются важной составляющей теории аналитических функций, выявляют некоторые ключевые свойства этих функций и имеют разнообразные следствия во многих областях математики, физики.

Интегральная теорема Коши и её следствия

Теорема 7 (интегральная теорема Коши)**.** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G. Тогда интеграл от неё по любому замкнутому контуру, лежащему в G, равен нулю.*

Доказательство. Пусть γ – замкнутый контур в области G. Тогда

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma u(x;y)\,dx - v(x;y)\,dy + i\oint_\gamma v(x;y)\,dx + u(x;y)\,dy.$$

Функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$, как действительная и мнимая части аналитической функции, имеют непрерывные производные в области G, а следовательно и в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кривой γ. Поэтому мы можем применить формулу Грина:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \int_{\overline{D}}\left(-\frac{\partial v(x;y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x;y)}{\partial y}\right)dxdy + i\int_{\overline{D}}\left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x;y)}{\partial y}\right)dxdy.$$

В силу условий Коши-Римана подынтегральные выражения равны нулю, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 4. *Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G, ограниченной контуром Γ, непрерывна в $\overline{G}$, то $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$.*

Доказательство см., например, в [1] гл. I §4 п. 12.

Следствие 5. *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в многосвязной области G, непрерывна в $\overline{G}$. Пусть граница ∂G области составлена из внешнего контура Γ и нескольких внутренних контуров $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$: $\partial\Gamma = \Gamma^+ \cup \gamma_1^- \cup \ldots \cup \gamma_n^-$. Тогда $\displaystyle\oint_{\partial G} f(z)\,dz = 0$.*

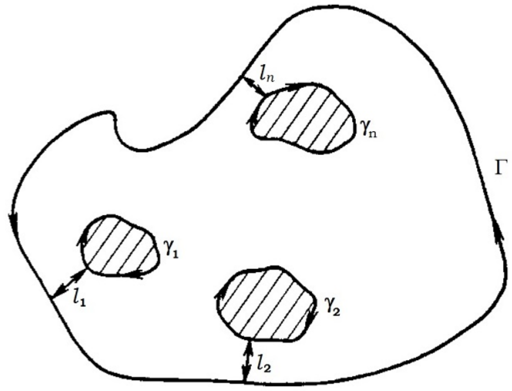
Доказательство. Соединим каждый внутренний контур γ_k с внешней границей кусочно-гладкой кривой l_k и рассмотрим замкнутый контур $C = \Gamma \cup l_1 \cup \gamma_1^- \cup l_1^- \cup \ldots \cup l_n \cup \gamma_n^- \cup l_n^-$, где кривые l_k пробегаются дважды в противоположных направлениях. Контур C служит границей односвязной области G', и в силу предыдущего следствия интеграл по нему равен нулю. Тогда

$$0 = \oint_C f(z)\,dz = \oint_{\partial G} f(z)\,dz + \oint_{l_1} f(z)\,dz + \oint_{l_1^-} f(z)\,dz + \ldots \oint_{l_n} f(z)\,dz + \oint_{l_n^-} f(z)\,dz = \oint_{\partial G} f(z)\,dz.$$

$\square$

Очевидным следствием теоремы является следующее

Следствие 6. *Если $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G, то для любых точек $z_1, z_2 \in G$ интеграл $\int_{\breve{z_1 z_2}} f(z)\,dz$ не зависит от кривой, соединяющей эти точки.*



Независимость интеграла $\int_{\overset{\smile}{z_1 z_2}} f(z)\,dz$ от кривой, соединяющей точки z_1 и z_2, позволяет рассматривать его как однозначную функцию точек z_1 и z_2. Если зафиксировать одну из точек, а второй позволить произвольно меняться в области G, то интеграл определит однозначную функцию комплексной переменной, определённую в области G:

$$F(z) = \int_{\overset{\smile}{z_0 z}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{15}$$

здесь z_0 – фиксированная, а z – произвольная точки области G. Как и в случае функций действительной переменной, будем называть её *интегралом с переменным верхним пределом.*

Итак, мы получили

Следствие 7. *Если $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G функция, то интеграл с переменным верхним пределом от $f(z)$ является однозначной функцией в области G.*

Следует заметить, что требование аналитичности функции $f(z)$ для определения интеграла с переменным верхним пределом является чрезмерным[15]. Достаточно потребовать, чтобы функция $f(z)$ была непрерывна в односвязной области G и чтобы интеграл от неё по любому замкнутому контуру, лежащему в G, был равен нулю. Тогда функция (15) также определена и является однозначной в области G.

Для функций действительной переменной интеграл с переменным верхним пределом играл роль первообразной подынтегральной функции в случае непрерывности последней. Покажем, что это свойство сохраняется и для функций комплексного переменного.

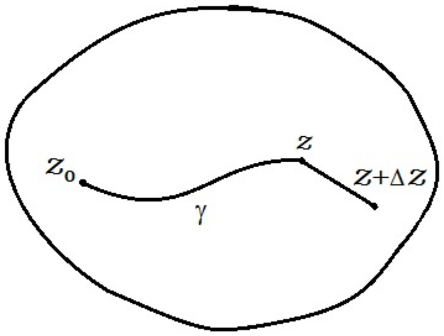
Теорема 8. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области G и пусть $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$. Тогда функция (15) является аналитической в области G и $F'(z) = f(z)$.*

Доказательство. Будем доказывать равенство $F'(z) = f(z)$ по определению. Рассмотрим

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right).$$

В силу независимости интеграла от кривой, соединяющей точки, будем считать первый интеграл по кривой $\gamma \cup [z; z+\Delta z]$, где γ – кривая, по которой вычисляется второй интеграл, а $[z; z+\Delta z]$ – отрезок прямой:

[15] На первый взгляд. См. далее теорему Морера



Тогда
$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta.$$
Пользуясь тем, что
$$\int_z^{z+\Delta z} 1\,d\zeta=\Delta z,$$
преобразуем
$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta-f(z)\int_z^{z+\Delta z} 1\,d\zeta\right)=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}\big(f(\zeta)-f(z)\big)\,d\zeta.$$
Оценим модуль этой разности:
$$\Big|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\Big|\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\Big|\int_z^{z+\Delta z}\big(f(\zeta)-f(z)\big)\,d\zeta\Big|\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\max_\zeta|f(\zeta)-f(z)|\cdot|\Delta z|$$
В силу непрерывности функции $f(z)$ её изменение на отрезке $[z;z+\Delta z]$ при достаточно малом $|\Delta z|$ меньше любого наперёд взятого $\varepsilon>0$, следовательно
$$\Big|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\Big|<\varepsilon,$$
что доказывает равенство
$$F'(z)=f(z),\quad z\in G.$$
Отсюда следует аналитичность функции $F(z)$ в области G, поскольку её производная является непрерывной функцией. □

Определение 16. Аналитическая функция $\Phi(z)$ называется *первообразной* функции $f(z)$ в области G, если $\Phi'(z)=f(z)$, $z\in G$.

Первообразные обладают следующими свойствами.

1. Две первообразные одной функции отличаются друг от друга не более чем на константу.

   Действительно, пусть $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ – первообразные функции $f(z)$ на односвязной области G. Тогда для функции
   $$F(z)=\Phi_1(z)-\Phi_2(z)=U(x;y)+iV(x;y)$$
   имеем
   $$F'(z)=0=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}-i\frac{\partial U}{\partial y}.$$
   Откуда следует, что частные производные функций $U(x;y)$ и $V(x;y)$ равны нулю, т.е. эти функции не зависят ни от x, ни от y. Следоваетельно, функция $F(z)\equiv const.$ □

2. Формула Ньютона-Лейбница.

   Пусть $\Phi(z)$ – первообразная функции $f(z)$ в односвязной области G, и пусть одна из первообразных функции $f(z)$ выражается интегралом с переменным верхним пределом[16]. Тогда $\Phi(z)$ отличается от интеграла с переменным верхним пределом не более чем на постоянную величину:

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + \mathrm{C}.$$

   В силу независимости интеграла от кривой,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1). \qquad \square$$

Пример 6. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{z}$. Она является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением нуля. Следовательно, интегрируема по любой кривой, не проходящей через ноль.

Рассмотрим односвязную область $G = \{z: \ -\pi < \arg z < \pi\}$ – комплексная плоскость с разрезом по отрицательной действительной полуоси. Согласно вышеизложенному, в ней определена однозначная аналитическая функция

$$F(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{16}$$

В частности, интегрируя по отрезку действительной оси, получаем известную функцию

$$F(x) = \int_1^x \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln x, \quad x > 0.$$

Поэтому функцию, определённую равенством (16), рассматривают как продолжение натурального логарифма в комплексную плоскость и сохраняют за ней соответствующее обозначение

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in G.$$

Функция (16) в двусвязной области $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ не является однозначной, поскольку

$$\oint_{|z|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i,$$

т.е. при n-кратном обходе вокруг нуля $\ln z$ приобретёт добавку $2\pi n i$. Эту многозначную функцию обозначают $\mathrm{Ln}\, z$:

$$\mathrm{Ln}\, z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z + 2\pi n i, \quad z \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Иногда это равенство принимают за определение логарифмической функции в комплексной плоскости. Натуральный логарифм, определяемый таким образом, совпадает с натуральным логарифмом, определённым как функция, обратная к экспоненте.

[16]Например, $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 8 или является аналитической в G.

Теорема 9 (Интегральная формула Коши)**.** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G. Тогда для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$ и для любой точки z_0, лежащей внутри контура,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Доказательство. Проведём внутри контура γ окружность C_ρ с центром в точке z_0 радиуса ρ: В силу интегральной теоремы Коши

$$\int_{\gamma \cup C_\rho^-} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0,$$

следовательно,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Рассмотрим интеграл по окружности:

$$\begin{aligned}\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz + \int_{C_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)}{\rho e^{i\varphi}}\, \rho i e^{i\varphi}\, d\varphi + f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\, d\varphi = \\ &= i \int_0^{2\pi} \big(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\big)\, d\varphi + 2\pi i f(z_0).\end{aligned}$$

Интеграл в правой части может быть сделан сколь угодно малым по абсолютной величине за счёт выбора радиуса окружности и непрерывности функции $f(z)$:

$$\left| i \int_0^{2\pi} \big(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\big)\, d\varphi \right| \leqslant 2\pi \max_\varphi \left| f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0) \right| < \varepsilon.$$

В равенстве

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = i \int_0^{2\pi} \big(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\big)\, d\varphi + 2\pi i f(z_0)$$

левая часть и второе слагаемое в правой части не зависят от ρ, а значит и интеграл в правой части от него не зависит, следовательно, он равен нулю, и мы получаем требуемое равенство. □

З а м е ч а н и е 1. Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G, ограниченной контуром Γ, непрерывна в $\overline{G}$, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \quad z_0 \in G.$$

З а м е ч а н и е 2. Если функция $f(z)$ является аналитической в многосвязной области G и непрерывной в $\overline{G}$, то интегральная формула Коши остаётся верной при интегрировании по границе области G:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \quad z_0 \in G,$$

или по любой кривой, ограничивающей только точки области G.

Следствие 8 (Формула среднего значения). *Если $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G функция, то*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} f(z)\, dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi, \quad z_0 \in G,$$

где C_ρ – окружность с центром в точке z_0 радиуса ρ, лежащая внутри G.

Формула среднего значения показывает, что значение аналитической функции в некоторой точке есть среднее её значений на окружности, проведённой вокруг этой точки.

Как следствие интегральной формулы Коши, получим следующую характеристику аналитических функций.

Теорема 10 (Принцип максимума модуля аналитической функции). *Пусть $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G, непрерывна в $\overline{G}$. Тогда модуль функции $f(z)$ либо является величиной постоянной в $\overline{G}$, либо достигает максимума на границе области.*

Доказательство см. в [2].

Следствие 1. *Если в добавление к условиям теоремы функция $f(z)$ не равна нулю в $\overline{G}$, то справедлив принцип минимума модуля: модуль функции $f(z)$ либо является величиной постоянной в $\overline{G}$, либо достигает минимума на границе области.*

Доказательство. При условии $f(z) \neq 0$ функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ удовлетворяет условиям теоремы. Остаётся сказать, что максимум модуля функции $g(z)$ совпадает с минимумом модуля функции $f(z)$. □

Следствие 2. *Если функция аналитическая $f(z)$ постоянна по абсолютной величине в односвязной области G, то она постоянна в этой области.*

Доказательство. Если $|f(z)| = R(x; y) \equiv const$, то в силу условий Коши-Римана (8) аргумент этой функции есть также величина постоянная. Следовательно, функция принимает постоянные значения. □

Интегралы, зависящие от параметра

Теорема 11. *Пусть в комплексной плоскости заданы область G и кривая γ, расположенные друг относительно друга произвольным образом. Пусть функция $f(z;\zeta)$ определена на $G \times \gamma$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) при любом фиксированном $\zeta \in \gamma$ функция $f(z;\zeta)$ как функция переменной z является аналитической в G;

2) функции $f(z;\zeta)$ и $\dfrac{\partial f(z;\zeta)}{\partial z}$ непрерывны в $G \times \gamma$ как функции двух переменных.

Тогда

$$F(z) = \int_\gamma f(z;\zeta)\, d\zeta, \quad z \in G,$$

является аналитической функцией в области G и

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f(z;\zeta)}{\partial z}\, d\zeta, \quad z \in G.$$

Доказательство. Представим функцию $F(z)$ в виде суммы двух криволинейных интегралов:

$$F(z) = \int_\gamma u(x;y;\xi;\eta)\,d\xi - v(x;y;\xi;\eta)\,d\eta + i\int_\gamma v(x;y;\xi;\eta)\,d\xi + u(x;y;\xi;\eta)\,d\eta = U(x;y) + iV(x;y).$$

Применим к каждому из них теорему математического анализа о возможности дифференцирования интеграла, зависящего от параметра[17]:

> **Теорема.** (См., например, [?, ?].) *Если функция $\varphi(x;t)$ вместе со своей производной $\frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial x}$ непрерывна по совокупности переменных на множестве $[a;b]\times[\alpha;\beta]$, то в каждой точке интервала $(a;b)$*
>
> $$\frac{d}{dx}\int_\alpha^\beta \varphi(x;t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial x}\,dt.$$

Получим:

$$\frac{\partial U(x;y)}{\partial x} = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,d\xi - \frac{\partial v}{\partial x}\,d\eta, \qquad \frac{\partial U(x;y)}{\partial y} = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial y}\,d\xi - \frac{\partial v}{\partial y}\,d\eta,$$
$$\frac{\partial V(x;y)}{\partial y} = \int_\gamma \frac{\partial v}{\partial y}\,d\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\,d\eta, \qquad \frac{\partial V(x;y)}{\partial x} = \int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}\,d\xi + \frac{\partial u}{\partial x}\,d\eta.$$

Из условий Коши-Римана для функции $f(z)$ получаем выполнение этих условий для функции $F(z)$.

Кроме того, в силу теоремы математического анализа о непрерывности интеграла, зависящего от параметра:

> **Теорема.** (См., например, [?, ?].) *Если функция $\varphi(x;t)$ непрерывна по совокупности переменных на множестве $[a;b]\times[\alpha;\beta]$, то интеграл*
>
> $$\int_\alpha^\beta \varphi(x;t)\,dt$$
>
> *является непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$.*

функции $\frac{\partial U(x;y)}{\partial x}$, $\frac{\partial U(x;y)}{\partial y}$, $\frac{\partial V(x;y)}{\partial x}$, $\frac{\partial V(x;y)}{\partial y}$ непрерывны по совокупности переменных в области G. Следовательно, функция $F(z)$ является аналитической в области G.

Найдём её производную:

$$F'(z) = \frac{\partial U(x;y)}{\partial x} + i\frac{\partial V(x;y)}{\partial x} = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,d\xi - \frac{\partial v}{\partial x}\,d\eta + i\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}\,d\xi + \frac{\partial u}{\partial x}\,d\eta =$$
$$= \int_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\,d\xi + i\int_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\,d\eta = \int_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\,(d\xi + i\,d\eta) =$$
$$= \int_\gamma \frac{\partial f(z;\zeta)}{\partial z}\,d\zeta. \qquad \square$$

[17] Убедитесь в возможности применения этой теоремы.

Бесконечная дифференцируемость аналитических функций

На основе доказанной теоремы и интегральной формулы Коши мы получим одно из ключевых свойств функций комплексного переменного. Мы покажем, что *аналитическая функция бесконечно дифференцируема.*

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G, непрерывна в $\overline{G}$. Тогда по интегральной формуле Коши для любого $z \in G$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma = \partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Зафиксируем точку z и проведём вокруг неё на расстоянии не менее $d > 0$ кривую $\gamma \subset G$. Обозначим G' точки, окружённые контуром γ – односвязную область. Рассмотрим подынтегральную функцию $\varphi_1(z;\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ на множестве $G' \times \Gamma$. Очевидно, она удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы, поэтому

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Рассмотрим на множестве $G' \times \Gamma$ функцию $\varphi_2(z;\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$. Она также удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы, поэтому

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta.$$

Продолжая последовательно применять теорему 11, в произвольной точке $z \in G$ получим

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

□

Теорема 12 (Теорема Лиувилля)**.** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая во всей комплексной плоскости. Если она ограничена в $\mathbb{C}$, то она является постоянной.*

Доказательство. В силу аналитичности функция $f(z)$ имеет первую производную во всей плоскости, выражаемую интегралом Коши. Тогда для любой точки $z \in \mathbb{C}$ и окружности C_R с центром в этой точке

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Из ограниченности функции: $|f(z)| \leqslant M$, получаем оценку

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z + Re^{i\varphi})|}{R^2}\, R d\varphi \leqslant \frac{M}{R},$$

которая показывает, что производная $f'(z)$ может быть сделана сколь угодно малой по абсолютной величине выбором радиуса окружности, что возможно лишь в случае равенства её нулю. Из произвольности точки z заключаем, что $|f'(z)| \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, следовательно, $f'(z) \equiv 0$ и $f(z) \equiv const$ в $\mathbb{C}$. □

Определение 17. Функция, аналитическая во всей комплексной плоскости, называется *целой.*

Таким образом, теорема Лиувилля устанавливает, что *целая функция не может быть ограниченной в* $\mathbb{C}$*, не будучи постоянной.*

Следующая теорема устанавливает достаточные условия аналитичности и является обратной к интегральной теореме Коши.

Теорема 13 (Теорема Морера)**.** *Пусть функция* $f(z)$ *непрерывна в односвязной области* G *и пусть для любого замкнутого контура* $\gamma \subset G$

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Тогда $f(z)$ *– аналитическая в* G*.*

Доказательство. При данных условиях (согласно теореме 8) функция $f(z)$ имеет аналитическую первообразную в области G

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Как теперь известно, аналитическая функция бесконечно дифференцируема, следовательно, функция $F(z)$ имеет непрерывную вторую производную

$$F''(z) = f'(z), \quad z \in G,$$

что по определению означает аналитичность функции $f(z)$ в G. □

Замечание. Теорему Морера можно обобщить на многосвязные области следующим образом: *если функция непрерывна в области* G *и интеграл от неё по любому замкнутому контуру, ограничивающему только точки области, равен нулю, то эта функция аналитична в* G*.*

Ряды

Определение 18. Ряд из комплексных чисел $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм этого ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ имеет конечный предел. Этот предел S называется *суммой ряда*. В этом случае говорят, что *ряд сходится к* S:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} z_m.$$

Сходимость последовательности S_n означает одновременную сходимость последовательности действительной и мнимой частей

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} z_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} (x_m + iy_m) \to S = \operatorname{Re} S + i\operatorname{Im} S \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} x_m \to \operatorname{Re} S, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} y_m \to \operatorname{Im} S, \end{cases}$$

поэтому исследование сходимости ряда из комплексных чисел сводится к исследованию сходимости двух рядов действительных чисел.

Определение 19. Ряд из функций комплексного переменного $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется *сходящимся на множестве* D, если он сходится в каждой точке множества D. *Суммой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется функция $f(z)$, поточечно определяемая равенством

$$f(z_0) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0), \quad z_0 \in D.$$

Определение 20. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится к своей сумме* $f(z)$ *равномерно на множестве* D, если последовательность частичных сумм этого ряда сходится к функции $f(z)$ равномерно на множестве D, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ \forall\, n > N(\varepsilon)\ \forall\, z \in D\ \Rightarrow\ \left| \sum_{m=1}^{n} f_m(z) - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Свойства равномерно сходящихся рядов.

1. Из определения следует, что равномерная сходимость ряда равносильна выполнению двух условий:

1) ряд сходится поточечно к функции $f(z)$ на множестве D,

2) остаток ряда равномерно сходится к нулю на множестве D:

$$R_n(z) := f(z) - \sum_{m=1}^{n} f_m(z) \overset{D}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

2. `Критерий Коши.` Для равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ на множестве D необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\;:\;\forall\,n > N(\varepsilon)\;\forall\,p \in \mathbb{N}\;\forall\,z \in D\;\Rightarrow\;\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} f_m(z)\Big| < \varepsilon.$$

3. `Признак Вейерштрасса.` Если элементы ряда равномерно ограничены на множестве D и ряд из мажорант сходится, то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве D:

$$|f_n(z)| \leqslant c_n,\; z \in D \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \;\text{ сходится абсолютно и равномерно на } D.$$

4. `Непрерывность суммы ряда.` Если ряд из непрерывных на множестве D функций сходится равномерно на этом множестве, то его сумма является непрерывной на множестве D функцией.

5. `Интегрируемость суммы ряда.` Если ряд из непрерывных на множестве D функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на этом множестве к $f(z)$, то для любой (спрямляемой) кривой $\gamma \subseteq D$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Доказательство этих свойств проводится так же, как для функций действительного переменного. Обсудим свойства, присущие рядам из аналитических функций.

Теорема 14 (I теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть функции $f_n(z)$ – аналитические в области G, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на любой замкнутой подобласти области G. Тогда*

1) сумма ряда $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ – аналитическая функция в G,

2) $f^{(k)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in D,$

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно на любой замкнутой подобласти области G.

Доказательство. 1). Для доказательства аналитичности функции $f(z)$ применим теорему Морера. Для этого возьмём произвольную точку $z \in D$ и окружим её контуром $\gamma \subset G$, ограничивающим только точки области G. Тогда замкнутая односвязная область $\overline{G'}$, ограниченная контуром γ, лежит в G, следовательно, ряд сходится на ней равномерно и на контуре γ его можно интегрировать почленно:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Согласно интегральной теореме Коши интегралы от функций $f_n(z)$ равны нулю, а значит и вся сумма, а вместе с нею и интеграл от $f(z)$ равны нулю. Следовательно, по теореме Морера, функция $f(z)$ аналитическая в G.

2). Возьмём произвольную точку $z \in D$ и окружим её контуром $\gamma \subset G$, ограничивающим только точки области G и отстоящим от точки z на расстояние не менее $d > 0$. Точки, ограниченные кривой γ, образуют односвязную подобласть G' области G. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}, \qquad \zeta \in \gamma, \tag{17}$$

где z – изначально выбранная точка. По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на замкнутой односвязной области $\overline{G'}$, а значит и на её границе γ. Тогда ряд (17) также сходится равномерно на γ:

$$\sum_{m=n+1}^{n+p} \Big|\frac{f_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\Big| \leqslant \frac{1}{|\zeta - z|^{k+1}} \sum_{m=n+1}^{n+p} |f_m(\zeta)| \leqslant \frac{1}{d^{k+1}} \sum_{m=n+1}^{n+p} |f_m(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{d^{k+1}},$$

и его суммой является функция $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}$. Следовательно, его можно проинтегрировать почленно на γ:

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta = \oint_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Умножая равенство на $\frac{k!}{2\pi i}$, получаем

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

3). Возьмём произвольную замкнутую подобласть $\overline{G'}$ области G. Так как сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \qquad z \in G,$$

уже доказана, достаточно показать, что

$$R_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z) - \sum_{m=1}^{n} f_m^{(k)}(z) \overset{\overline{G'}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Проведём вокруг неё замкнутый контур γ, ограничивающий только точки области G и отстоящий от границы области G' на расстояние не менее $d > 0$[18]. Область, ограниченную контуром γ, обозначим G''; для неё выполняется: $\overline{G''} \subset G$.

Функция

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{m=1}^{n} f_m(z)$$

аналитическая в G; значит она аналитическая в G'' и непрерывна на $\overline{G''}$. Следовательно

$$R_n^k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{R_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \qquad z \in G''.$$

[18]Если $\overline{G'}$ – многосвязная с границей $\Gamma^+ \cup \Gamma_1^- \cup \ldots \cup \Gamma_n^-$, то мы проведём кроме внешнего контура γ ещё n внутренних контуров $\gamma_1^-, \ldots, \gamma_n^-$ так, чтобы ограниченная ими многосвязная замкнутая область $\overline{G''}$ целиком принадлежала области G и расстояние между границами областей G' и G'' было положительным.

Оценим эту функцию для $z \in \overline{G'}$:

$$\left|R_n^k(z)\right| = \frac{k!}{2\pi}\left|\oint_\gamma \frac{R_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{k!}{2\pi}\frac{1}{d^{k+1}}\max_{\zeta\in\gamma}|R_n(\zeta)|\oint_\gamma 1\,dl.$$

По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на $\overline{G''}$, следовательно $|R_n(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in \overline{G''}$ и $n > N(\varepsilon)$. В частности, это верно и для $z = \zeta \in \gamma = \partial G''$. Тогда

$$\left|R_n^k(z)\right| < \frac{k!}{2\pi}\frac{L\varepsilon}{d^{k+1}},$$

где L – длина кривой γ. □

Условие равномерной сходимости рядов из производных на замкнутых подобластях (а не на всей области G) существенно, что показывает следующий пример.

Пример 7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ сходится равномерно на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, что следует из признака Вейерштрасса:

$$\forall\,|z| \leqslant 1 \qquad \frac{|z^n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

Однако ряд, составленный из первых производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n},$$

не сходится на окружности $|z| = 1$ (он расходится в точке $z = 1$). Согласно теореме, он сходится равномерно на замкнутых подобластях круга $|z| < 1$.

Теорема 15 (II теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть функции $f_n(z)$ – аналитические в области G, непрерывны на $\overline{G}$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на границе области G, то он сходится равномерно на $\overline{G}$.*

Доказательство проведём по критерию Коши. Для $z \in \overline{G}$ рассмотрим отрезок ряда

$$\sum_{m=n+1}^{n+p} f_m(z)$$

и применим к нему принцип максимума модуля аналитической функции:

$$\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} f_m(z)\Big| \leqslant \max_{z\in\overline{G}}\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} f_m(z)\Big| = \max_{\zeta\in\partial G}\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} f_m(\zeta)\Big|.$$

В силу равномерной сходимости на границе области G, для любых $n > N(\varepsilon)$ и $p \in \mathbb{N}$

$$\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} f_m(\zeta)\Big| < \varepsilon, \qquad \zeta \in \partial G.$$

Осталось заметить, что непрерывная функция $\Big|\sum\limits_{m=n+1}^{n+p} f_m(\zeta)\Big|$ достигает своего максимума на компакте ∂G, следовательно $\Big|\sum\limits_{m=n+1}^{n+p} f_m(z)\Big| < \varepsilon$ для любых $n > N(\varepsilon)$ и $p \in \mathbb{N}$ и для всех $z \in \overline{G}$. □

Степенные ряды

Степенным рядом в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ или по степеням $z - z_0$ называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n \in \mathbb{C}.$$

Теорема 16 (Теорема Абеля). *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *сходится в точке* $z = z_1 \neq z_0$, *то он сходится абсолютно в круге* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ *и для любого* $\rho < |z_1 - z_0|$ *сходится равномерно в замкнутом круге* $|z - z_0| \leqslant \rho$.

Доказательство. 1). Возьмём z: $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$ следует, что его общий член стремится к нулю, а значит, последовательность $c_n (z_1 - z_0)^n$ ограничена. Тогда

$$|c_n (z - z_0)^n| = \left| c_n (z_1 - z_0)^n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| \leqslant M q^n,$$

где $q = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M q^n$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. По признаку сравнения получаем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ в указанной точке z сходится абсолютно.

2). Снова воспользуемся ограниченностью последовательности $c_n (z_1 - z_0)^n$ для оценки общего члена ряда:

$$|c_n (z - z_0)^n| = \left| c_n (z_1 - z_0)^n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| \leqslant M \left| \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right|.$$

Далее, для всех z: $|z - z_0| \leqslant \rho < |z_1 - z_0|$ получаем

$$|c_n (z - z_0)^n| \leqslant M \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n} = M q^n,$$

где $q = \frac{\rho}{|z_1 - z_0|} < 1$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M q^n < \infty$. Согласно признаку Вейерштрасса отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится равномерно в замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant \rho < |z_1 - z_0|$. $\square$

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ расходится в точке $z = z_2 \neq z_0$, то он расходится во всех точках z: $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Доказательство легко проводится методом от противного. $\square$

Определение 21. Число

$$R = \sup \left\{ |z - z_0| : \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n < \infty \right\}$$

называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Круг $|z - z_0| < R$ называется *кругом сходимости* степенного ряда.

Из определения радиуса сходимости и теоремы Абеля следует, что степенной ряд

- сходится абсолютно в круге сходимости;
- сходится равномерно в любом замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant \rho < R$ внутри круга сходимости;
- расходится вне круга сходимости, т.е. при $|z - z_0| > R$.

Как и в курсе математического анализа доказывается, что

- радиус сходимости степенного ряда вычисляется по формуле Коши–Адамара

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

или, если этот предел существует,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Из теорем об интегрировании и дифференцировании функциональных рядов (см. свойство 5 и теорему 14) вытекает, что

- степенные ряды можно интегрировать и дифференцировать почленно внутри круга сходимости; при этом радиус сходимости ряда не меняется[19];
- сумма степенного ряда является аналитической функцией в области $|z - z_0| < R$.

Почленным дифференцированием суммы ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ легко убедиться, что

- коэффициенты степенного ряда вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Таким образом, мы получили, что

- *если функция $f(z)$ представима степенным рядом в окрестности точки z_0, то она аналитическая в этой окрестности и степенной ряд является её рядом Тейлора.*

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 17 (Теорема Тейлора). *Любая аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ функция однозначно представима в этом круге степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.*

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в круге $|z-z_0| < R$. Возьмём в этом круге произвольную точку z и проведём окружность C_ρ с центром в точке z_0 радиуса ρ: $|z - z_0| < \rho < R$. Тогда значение функции f в точке z (согласно интегральной формуле Коши) может быть вычислено как интеграл по C_ρ:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

[19] Поведение на границе может меняться, как показывает пример 7.

Функцию $\frac{1}{\zeta - z}$ для $\zeta \in C_\rho$ можно разложить в ряд по степеням $z - z_0$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

причём этот ряд сходится равномерно относительно $\zeta \in C_\rho$ в силу условия $\frac{|z-z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z-z_0|}{\rho} = q < 1$. Следовательно на этой окружности его можно интегрировать почленно. Получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Итак, мы показали, что в произвольной точке z круга $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ представима в виде ряда по степеням $z - z_0$. Причём коэффициенты этого разложения не зависят от выбранной точки z:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

что доказывает единственность разложения функции $f(z)$ в степенной ряд. □

Замечание. В ходе доказательства мы установили, что коэффициенты разложения функции в степенной ряд являются коэффициентами Тейлора.

Суммируя все вышеприведённые рассуждения, получаем следующую (локальную) характеристику аналитических функций:

Функция является аналитической в круге $|z - z_0| < R$ тогда и только тогда, когда она представима в этом круге степенным рядом; при этом ряд является рядом Тейлора.

В ряде случаев используется понятие регулярной функции.

Определение 22. Функция $f(z)$ называется *регулярной в точке* z_0, если в некоторой окрестности этой точки она раскладывается в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < R.$$

Таким образом, *аналитичность функции в окрестности точки z_0 есть её регулярность в этой точке.*

Пример 8. Разложим функцию $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ в степенной ряд в окрестности точек $z = 0$ и $z = 1$.

1). $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k},$$

где

$$c_{2k} = (-1)^k, \quad c_{2k+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \quad \Rightarrow \quad R = 1$$

и областью сходимости ряда является круг $|z| < 1$. При этом ряд не сходится на границе круга, хотя во всех точках круга кроме $z = \pm i$ функция $f(z)$ является аналитической.

2). $z_0 = 1$.

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-1+(1-i)} - \frac{1}{z-1+(1+i)}\right) =$$

при $|z-1| < |1+i| = \sqrt{2}$ и $|z-1| < |1-i| = \sqrt{2}$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{z-1}{1-i}\Big)^n - \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{z-1}{1+i}\Big)^n\right).$$

Представим $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ и получим:

$$f(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{e^{i\frac{\pi(n+1)}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} - \frac{e^{-i\frac{\pi(n+1)}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}}}\right)(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{\pi(n+1)}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}}\cdot(z-1)^n.$$

Область сходимости ряда: $|z-1| < \sqrt{2}$.

Ряды Лорана

Более общим типом степенных рядов являются ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные степени $z-z_0$. Как и ряды Тейлора, они играют важную роль в теории аналитических функций.

Определение 23. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \qquad c_n \in \mathbb{C},$$

называется *рядом Лорана*[20].

Область сходимости ряда Лорана, очевидно, определяется областями сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \tag{18}$$

По свойствам степенных рядов, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в круге с центром в точке z_0 конечного или бесконечного радиуса R: $|z-z_0|<R$, и его сумма $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ является аналитической в этом круге.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ заменой переменной $t=(z-z_0)^{-1}$ приводится к степенному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}t^n$, который сходится в некотором круге $|t|<R_1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ сходится вне круга с центром в точке z_0 радиуса $\rho=R_1^{-1}$: $|z-z_0|>\rho$, и его сумма $f_2(z)$ – аналитическая в этой области.

Если $R<\rho$, то ряды (18) не имеют общих точек сходимости и ряд Лорана расходится.

Если $R=\rho$, то ряд Лорана может сходиться только в точках окружности $|z-z_0|=R$. Этот случай нам не будет интересен, поскольку мы преимущественно изучаем функции в областях.

Если $\rho<R$, то областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо $\rho<|z-z_0|<R$.

Итак, мы установили:

- *областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо* $\rho<|z-z_0|<R$, $\rho<R$.
- *сумма ряда Лорана является аналитической функцией в этом кольце:*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = f_1(z)+f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \qquad \rho<|z-z_0|<R.$$

Справедливо и обратное утверждение.

[20]Лоран, Пьер Альфонс (Laurent, Pierre Alphonse), 1813–1854, французский математик.

Теорема 18 (Теорема Лорана)**.** *Функция, аналитическая в кольце $\rho < |z - z_0| < R$, однозначно представима в нём рядом Лорана.*

Доказательство. 1). *Представление.* Возьмём ρ_1 и R_1: $\rho < \rho_1 < R_1 < R$ и рассмотрим функцию $f(z)$ в замкнутом кольце $\rho_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant R_1$. По интегральной теореме Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1} \cup C_{\rho_1}^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{19}$$

для любой точки z из кольца $\rho_1 < |z - z_0| < R_1$.[21]

Интеграл по C_{R_1}, как и в доказательстве теоремы Тейлора (см. теорему 17), можно представить в виде суммы степенного ряда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \tag{20}$$

сходящегося в круге $|z - z_0| < R_1$.

Рассмотрим интеграл по C_{ρ_1}. Для этого преобразуем функцию

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{-1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}.$$

Для $\zeta \in C_{\rho_1}$ выполнено $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{\rho_1}{z - z_0} = q < 1$, тогда

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

причём этот ряд сходится равномерно на C_{ρ_1}. Подставим это разложение под знак интеграла и проинтегрируем ряд почленно:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\, d\zeta =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\, d\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n-1}}{(z - z_0)^{n+1}},$$

где

$$c_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\, d\zeta.$$

Сдвигая счётчик на единицу, получаем нужное нам представление интеграла в виде ряда:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \qquad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\, d\zeta, \tag{21}$$

область его сходимости: $|z - z_0| > \rho_1$.

Подставим полученные разложения в (19) и получим представление функции $f(z)$ в виде ряда Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

[21] В формуле (19) C_{R_1} и C_{ρ_1} – окружности с общим центром z_0 радиусов R_1 и ρ_1 соответственно.

сходящегося в произвольной точке z области $\rho_1 < |z - z_0| < R_1$. Поскольку ρ_1 и R_1 были взяты произвольно, это разложение верно для любой точки z из области $\rho < |z - z_0| < R$.

Коэффициенты c_n этого разложения вычисляются по похожим, но всё-таки разным, формулам при $n \geqslant 0$ и $n < 0$. Для унификации обозначений деформируем, пользуясь аналитичностью подынтегральный функции[22], контуры C_{R_1} и C_{ρ_1} в формулах (20) и (21) к одному контуру γ, лежащему в кольце $\rho_1 < |z - z_0| < R_1$ и содержащему точку z_0 внутри:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\, d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Окончательно для любого z: $\rho < |z - z_0| < R$, получаем:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2). *Единственность.* Предположим, существуют два разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n, \qquad \rho < |z - z_0| < R.$$

Домножим функцию $f(z)$ на $(z - z_0)^{-m-1}$ и проинтегрируем произведение по окружности $|z - z_0| = R_0$, $\rho < R_0 < R$. Пользуясь тем, что

$$\oint_{C_{R_0}} (z - z_0)^{n-m-1}\, dz = \int_0^{2\pi} R_0^{n-m-1} e^{i(n-m-1)\varphi} i R_0 e^{i\varphi}\, d\varphi = i R_0^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi}\, d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi i, & n = m, \end{cases}$$

получаем

$$\oint_{C_{R_0}} f(z)(z - z_0)^{-m-1}\, dz = 2\pi i \cdot c_m = 2\pi i \cdot d_m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

что доказывает единственность разложения. □

Особые точки аналитических функций

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки z_0: $0 < |z - z_0| < R$, и в самой точке z_0 её аналитичность нарушается[23]. Такие точки будем называть *изолированными особыми точками* функции $f(z)$.

Согласно теореме Лорана, в этом случае функция $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана на множестве $0 < |z - z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Первую сумму – ряд по неотрицательным степеням $z - z_0$ – называют *правильной частью ряда Лорана*, а вторую сумму, содержащую только отрицательные степени – *главной частью ряда Лорана.*

Особые точки принято характеризовать по предельным свойствам функции или по структуре ряда Лорана. Эти подходы равносильны. Мы изберём второй способ.

[22] а именно, интегральной теоремой Коши.

[23] Это означает, что $f(z)$ не является аналитической в любой окрестности точки z_0.

Определение 24. Изолированная особая точка z_0 называется

- *устранимой особой точкой*, если главная часть ряда Лорана не содержит ни одного слагаемого, т.е. $c_{-n} = 0$ при $n \in \mathbb{N}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n;$$

- *полюсом k-го порядка*, если главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, причём $c_{-k} \neq 0$ и $c_{-n} = 0$ при $n > k$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n};$$

  полюс первого порядка называют также *простым полюсом*;

- *существенно особой точкой*, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

Приведём простые и удобные характеристики особых точек на языке предельного перехода.

1. `Характеристика устранимой особой точки.`

Из определения устранимой особой точки с очевидностью следует

Утверждение 1. *Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то функция $f(z)$ имеет в этой точке конечный предел, а именно*

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = c_0,$$

где c_0 – коэффициент из разложения функции в ряд Лорана.

В частности, функция $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности устранимой особой точки. Верно и обратное.

Утверждение 2. *Если функция $f(z)$ – аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки z_0 и ограничена на этом множестве, то z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ – аналитическая в кольце $0 < |z - z_0| < R$. Тогда, согласно теореме Лорана, она разложима в ряд Лорана в этом кольце, а коэффициенты могут быть вычислены по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где C_ρ – окружность с центром в точке z_0 радиуса $\rho \in (0; R)$. Из ограниченности функции получаем

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}}\, \rho |ie^{i\varphi}|\, d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\rho^n} \rho\, d\varphi = \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда, если $n < 0$, то $|c_n| \to 0$ при $\rho \to 0$, следовательно, $c_n = 0$ при $n < 0$ и z_0 – устранимая особая точка. $\square$

В итоге для аналитической в $0 < |z - z_0| < R$ функции $f(z)$ получаем:

- z_0 – *устранимая особая точка функции* $f(z)$ $\Leftrightarrow$ $f(z)$ *ограничена в* $0 < |z-z_0| < R$;
- z_0 – *устранимая особая точка функции* $f(z)$ $\Leftrightarrow$ *существует конечный предел* $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

З а м е ч а н и е. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то её можно доопределить в этой точке по непрерывности:

$$f(z_0) := \lim_{z\to z_0} f(z) = c_0.$$

Тогда её разложение в ряд Лорана будет выполнено в целой окрестности точки z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad |z-z_0| < R,$$

а значит, по свойствам степенных рядов, (доопределённая) функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z-z_0| < R$. Это объясняет название особой точки – «устранимая»: нарушение аналитичности в этой точке можно устранить простым доопределением функции.

Пример 9. Функция $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$ – аналитическая в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, имеет единственную (конечную) особую точку $z_0 = 0$.

1-й способ: ряд Лорана в окрестности точки z_0. Пользуясь разложением косинуса в окрестности нуля, получаем:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}z^{2n}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Этот ряд содержит только правильную часть, следовательно, z_0 – устранимая особая точка.

Изначально мы вынуждены выкалывать в этом разложении точку $z = 0$ (условие $|z| > 0$), поскольку множитель $\frac{1}{z^2}$ не определён в нуле. Но окончательное разложение уже определено в нуле, поэтому, как уже говорилось, можно считать эту функцию определённой в нуле и аналитической. Точку $z = \infty$ выкалываем по условию сходимости ряда для косинуса.

2-й способ: существует предел

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2},$$

следовательно, $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

2. Характеристика полюса.

Теорема 19. *Пусть функция* $f(z)$ *– аналитическая в проколотой окрестности точки* z_0*. Точка* z_0 *является полюсом функции* $f(z)$ *тогда и только тогда, когда* $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть z_0 – полюс k-го порядка, т.е.

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad 0 < |z-z_0| < R,$$

где $c_{-k} \neq 0$. Тогда функция

$$\varphi(z) = f(z)(z-z_0)^k = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + \ldots$$

аналитическая в $0 < |z-z_0| < R$ и $\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = c_{-k} \neq 0$. По свойствам предела

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k} \to \infty \quad \text{при} \quad z \to z_0.$$

Достаточность. Пусть $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, т.е.

$$\forall\, E > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, z: \; 0 < |z-z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z)| > E.$$

Для z: $0 < |z-z_0| < \delta$ введём функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Она аналитическая в этой области и ограничена:

$$|g(z)| < \frac{1}{E},$$

следовательно, z_0 – устранимая особая точка функции $g(z)$, т.е.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad 0 < |z-z_0| < \delta, \tag{22}$$

причём $c_0 = 0$, поскольку $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$. Пусть c_k – первый ненулевой коэффициент в разложении (22), т.е.

$$g(z) = c_k(z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots + c_{k+n}(z-z_0)^{k+n} + \ldots = (z-z_0)^k \varphi(z),$$

где функция

$$\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z-z_0) + \ldots + c_{k+n}(z-z_0)^n + \ldots$$

аналитическая в круге $|z-z_0| < \delta$ и $\varphi(z_0) = c_k \neq 0$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k \varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k},$$

где $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ – аналитическая в круге $|z-z_0| < \delta$ и $\psi(z_0) \neq 0$. Разложим её в ряд Тейлора и получим

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z-z_0)^n = \frac{c'_0}{(z-z_0)^k} + \frac{c'_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c'_{k-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c'_{n+k}(z-z_0)^n,$$

причём $c'_0 = \psi(z_0) \neq 0$, следовательно z_0 – полюс k-го порядка функции $f(z)$. $\square$

Определение 25. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в круге $|z-z_0| < R$. Точка z_0 называется *нулём k-го порядка* функции $f(z)$, если функция представима в виде

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z), \qquad |z-z_0| < R,$$

где $g(z)$ – аналитическая в $|z-z_0| < R$ и $g(z_0) \neq 0$.

Из доказательства предыдущей теоремы можно извлечь следующие связи:

- *z_0 – полюс k-го порядка функции $f(z)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ z_0 – нуль k-го порядка функции $\frac{1}{f(z)}$;*

- *z_0 – полюс k-го порядка функции $f(z)$ $\Leftrightarrow$ $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\psi(z)$ – аналитическая в окрестности точки z_0 и $\psi(z_0) \neq 0$;*
- *z_0 – полюс k-го порядка функции $f(z)$ $\Leftrightarrow$ $f(z) \sim \frac{A}{(z-z_0)^k}$ при $z \to z_0$.*

Пример 10. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$ – аналитическая в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, имеет единственную (конечную) особую точку $z_0 = 0$; охарактеризуем её.

1-й способ: ряд Лорана в окрестности нуля. Воспользуемся разложением синуса в степенной ряд в окрестности нуля:

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}z^{2n}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Главная часть ряда Лорана состоит из одного слагаемого степени $n = -2$, следовательно, $z = 0$ – полюс 2-го порядка.

2-й способ:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^3} = \infty,$$

следовательно, $z_0 = 0$ – полюс. Определим его порядок:

$$\frac{\sin z}{z^3} \sim \frac{1}{z^2} \text{ при } z \to 0,$$

следовательно, z_0 – полюс 2-го порядка.

3. Характеристика существенно особой точки.

Теорема 20 (теорема Сохоцкого[24]). *Пусть z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда*

$$\forall\, A \in \mathbb{C}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \ \exists\, z_1 :\ 0 < |z_1 - z_0| < \delta\ \wedge\ |f(z_1) - A| < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим обратное: пусть

$$\exists\, A \in \mathbb{C}\ \exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, z :\ 0 < |z - z_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$; она аналитическая в кольце $0 < |z-z_0| < \delta$ и ограничена, следовательно z_0 – её устранимая особая точка. Следовательно, её можно представить в виде

$$g(z) = (z-z_0)^k\varphi(z), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая в круге $|z - z_0| < \delta$ и $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда

$$f(z) = A + \frac{1}{(z-z_0)^k\varphi(z)} = A + \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k},$$

где $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ – аналитическая в круге $|z - z_0| < \delta$. Следовательно,

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-z_0)^k} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + (A + c_k) + c_{k+1}(z-z_0) + \ldots$$

Если в этом представлении $k = 0$, то z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, если $k > 0$, то z_0 – полюс k-го порядка; оба эти утверждения противоречат условию. □

[24] Сохоцкий, Юлиан Васильевич (1842-1929) – русский математик.

З а м е ч а н и е 3. Можно привести другую (равносильную) формулировку теоремы Сохоцкого: *Если z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A существует последовательность точек $z_n \to z_0$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Таким образом,

- *z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ не существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.*

Пример 11. Функция $f(z) = z \cdot \sin\dfrac{1}{z}$ – аналитическая в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, имеет единственную (конечную) особую точку $z_0 = 0$; определим её тип.

1-й способ: выпишем ряд Лорана в окрестности нуля. Для этого воспользуемся разложением синуса в степенной ряд:

$$\sin\frac{1}{z} = \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}}, \quad |t| < \infty \quad\Leftrightarrow\quad |z| > 0.$$

Тогда

$$f(z) = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n}}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, следовательно, $z = 0$ – существенно особая точка.

2-й способ: найдём $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$. Для последовательности $z_n = \frac{1}{\pi n}$

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \pi n}{\pi n} = 0.$$

Для последовательности $z_k = \frac{i}{\pi k}$

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{i \sin(-i\pi k)}{\pi k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi k)}{\pi k} = \infty.$$

Следовательно, предела в нуле не существует и $z = 0$ – существенно особая точка.

Вычет аналитической функции в изолированной особой точке

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ однозначно разложима в ряд Лорана в некотором кольце $0 < |z - z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Определение 26. *Вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 (обозначается Выч $f(z_0)$ или $\operatorname{res} f(z_0)$) называется число

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz, \tag{23}$$

где γ – произвольный замкнутый контур, проведённый вокруг точки z_0 и лежащий в области аналитичности функции $f(z)$.

Данное определение корректно, поскольку, в силу интегральной теоремы Коши, величина интеграла (23) не зависит от выбранного контура.

Очевидно, что

- вычет в точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} ряда Лорана в окрестности этой точки:

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz = c_{-1};$$

- в устранимой особой точке вычет равен нулю.

В случае полюса можно указать простые формулы для нахождения вычета.

1. `Простой полюс. Общая формула.` В случае простого полюса

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots, \qquad \text{где } c_{-1} \neq 0,$$

следовательно

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0). \tag{24}$$

2. `Простой полюс. Частный случай.` Если функция представлена в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические в некоторой окрестности точки z_0, причём $\varphi(z_0) \neq 0$, а для функции $\psi(z)$ точка z_0 является нулём первого порядка, т.е.

$$\psi(z) = \psi'(z_0)(z - z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots, \qquad \psi'(z_0) \neq 0,$$

то вычет также можно вычислить по формуле

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{25}$$

3. `Полюс` k`-го порядка.` В этом случае

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots, \qquad \text{где } c_{-k} \neq 0,$$

следовательно

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \big(f(z)(z - z_0)^k \big). \tag{26}$$

Пример 12. Найти вычеты во всех конечных особых точках функции $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z(z^3 + 1)^2}$.

Конечные особые точки данной функции – это нули знаменателя:

$$z(z^3 + 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0,\ -1,\ e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$$

Точка $z = 0$ является нулём как знаменателя, так и числителя, причём

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin \pi z}{z(z^3 + 1)^2} = \pi,$$

следовательно, $z=0$ – устранимая особая точка и Выч $f(0)=0$.

Точка $z=-1$ также является нулём как знаменателя, так и числителя. В этом случае

$$\lim_{z\to-1} f(z)=\lim_{z\to-1}\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2}=\lim_{z\to-1}\frac{-\sin\pi(z+1)}{(z+1)^2(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2}=$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{-\pi}{(z+1)(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2}=\infty,$$

следовательно, $z=-1$ – полюс 1-го порядка (так как $f(z)\sim\frac{const}{(z+1)}$ при $z\to-1$)[25]. Найдём вычет:

$$\text{Выч}\, f(-1)=\lim_{z\to-1} f(z)(z+1)=\lim_{z\to-1}\frac{\sin\pi z}{(z+1)(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2}=$$

$$=\frac{-\pi}{(-1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})^2(-1-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{-\pi}{9}.$$

Точки $z=e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$ является нулями знаменателя второго порядка и не являются нулями числителя:

$$f(z)=\frac{\sin\pi z}{z(z+1)^2(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2},$$

следовательно, это полюса второго порядка функции $f(z)$.

$$\text{Выч}\, f(e^{\frac{i\pi}{3}})=\lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{3}}}\frac{d}{dz}\frac{\sin\pi z}{z(z+1)^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2}=$$

$$=\lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{3}}}\frac{\pi\cos(\pi z)}{z(z+1)^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2}-\frac{\sin(\pi z)\Big((z+1)^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2+2z(z+1)(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^2+2z(z+1)^2(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})\Big)}{z^2(z+1)^4(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})^4}$$

Пользуясь тем, что

$$e^{\frac{i\pi}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\qquad e^{\frac{i\pi}{3}}+1=\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\Big)=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}},$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}}-e^{\frac{-i\pi}{3}}=\Big(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\Big)-\Big(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\Big)=i\sqrt{3},$$

$$\cos(\pi e^{\frac{i\pi}{3}})=\cos\left(\pi\Big(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\Big)\right)=-\sin\frac{i\pi\sqrt{3}}{2}=i\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin(\pi e^{\frac{i\pi}{3}})=\sin\left(\pi\Big(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\Big)\right)=\cos\frac{i\pi\sqrt{3}}{2}=\mathrm{ch}\,\frac{\pi\sqrt{3}}{2},$$

вычисляем вычет.

Вычет в точке $z=e^{\frac{-i\pi}{3}}$ вычисляется аналогично.

[25] Можно рассуждать так: $z=-1$ – нуль знаменателя второго порядка и нуль числителя – первого, следовательно, она является полюсом первого порядка.

Вычеты и интегралы

Вычет в изолированной особой точке z_0 есть, по определению, значение интеграла

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz$$

по замкнутому контуру γ, проведённому вокруг точки z_0. Однако на это равенство можно смотреть и как на возможность вычисления интеграла при помощи вычета подынтегральной функции в особой точке:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \text{Выч}\, f(z_0).$$

Если контур γ содержит внутри не одну, а несколько изолированных особых точек функции аналитической $f(z)$, то такой интеграл также может быть вычислен при помощи вычетов.

Теорема 21 (Основная теорема о вычетах)**.** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и пусть она непрерывна в $\overline{G}$. Тогда*

$$\oint_{\partial G} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k).$$

Доказательство. Проведём вокруг каждой особой точки z_k замкнутый контур γ_k, лежащий в области G и окружающий только одну особую точку – z_k. Рассмотрим область G' с границей $\partial G' = \partial G \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \ldots \cup \gamma_n^-$; она является многосвязной. По теореме Коши для многосвязной области

$$\int_{\partial G'} f(z)\, dz = 0.$$

Отсюда

$$\oint_{\partial G} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^-} f(z)\, dz = 0$$

или

$$\oint_{\partial G} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k). \qquad \square$$

Можно соединить теоремы о вычислении интегралов по замкнутому контуру от аналитической функции (интегральную теорему Коши и основную теорему о вычетах) в одно утверждение:
Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G за исключением, быть может, конечного числа особых точек. Тогда для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$, не проходящего через особые точки,

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \begin{cases} 2\pi i \sum \text{Выч}\, f(z_k) & \text{по всем } z_k \text{, лежащим внутри контура } \gamma, \\ 0, & \text{если внутри } \gamma \text{ нет особых точек.} \end{cases}$$

Ряд Лорана в бесконечно удалённой точке

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области $R < |z| < \infty$. Эта область есть проколотая окрестность бесконечно удалённой точки. Согласно теореме Лорана, функция однозначно представима в этой области степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Первую сумму называют *правильной частью* ряда Лорана *в окрестности бесконечно удалённой точки*; эти слагаемые не имеют особенности в области $R < |z| < \infty$: они все бесконечно малые, кроме нулевого слагаемого, которое является постоянным.

Вторую сумму называют *главной частью* ряда Лорана: все её слагаемые бесконечно большие при $z \to \infty$. Именно эта часть ряда характеризует особую точку $z = \infty$, и эта характеристика такая же, как и в случае конечной точки z_0:

- $z = \infty$ является устранимой особой точкой, если главная часть ряда Лорана не содержит ни одного слагаемого;
- $z = \infty$ является полюсом, если главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, причём это полюс k-го порядка, если $c_k \neq 0$ и $c_n = 0$ при $n > k$;
- $z = \infty$ является существенно особой точкой, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

Ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки можно рассматривать как ряд по степеням $\frac{1}{z}$. При таком подходе разделение ряда на главную и правильную части совпадает с разделением в случае конечной особой точки.

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удалённой точке называется число

$$\text{Выч}\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z)\, dz,$$

где γ – произвольный замкнутый контур, проведённый вокруг точки $z = 0$ и лежащий в кольце $R < |z| < \infty$.

Это определение совпадает с определением вычета в конечной точке, поскольку γ служит замкнутым контуром, проведённым вокруг точки $z = \infty$, и при этом обход этой точки является положительным.

Однако в терминах коэффициентов ряда Лорана формула вычета отличается от случая конечной точки:

$$\text{Выч}\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z)\, dz = -c_{-1},$$

и это коэффициент слагаемого из правильной части ряда Лорана.

Отсюда следует, что даже в случае, когда $z = \infty$ не является особой точкой, вычет в ней может оказаться не нулевым.

В ряде случаев есть простые формулы для нахождения вычеты в бесконечно удалённой точке:

- если $f(z) \sim \frac{A}{z}$ при $z \to \infty$, то $\text{Выч}\, f(\infty) = -A$;
- если $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$ при $z \to \infty$, то $\text{Выч}\, f(\infty) = 0$.

Вычеты во всех особых точках аналитической функции есть величина постоянная, а именно

Теорема 22 (Теорема о сумме вычетов)**.** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k) + \text{Выч}\, f(\infty) = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Проведём замкнутый контур γ, окружающий все конечные особые точки $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда, по основной теореме о вычетах,

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k).$$

С другой стороны

$$\oint_{\gamma^-} f(z)\, dz = 2\pi i\, \text{Выч}\, f(\infty).$$

Отсюда получаем равенство (27). □

Список литературы

[1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного / СПб. : Лань, 2002. 688 с.

[2] Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной / М.: Наука, 1967. 304 с.

[3] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, часть I /

[4] Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по ТФКП / М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 480 с.

[5] Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций /