

Контрольная работа по теме «Определенный интеграл»

Вариант 1

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} a) & \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^4 - x^2 - 2}} dx; & b) & \int_{\pi/4}^{\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{8 \operatorname{tg} x + 1}{3 \cos^2 x + 8 \sin^2 x - 7} dx; \\ c) & \int_{-\pi/2}^0 2^8 \cos^8 x dx; & d) & \int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{4 - x^2} dx}{x^4}. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$a) y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \frac{\pi}{4}, \quad x = 2; \quad b) r = 2 + \cos 2\varphi, \quad r = 2 \quad (r \leq 2).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right).$$

Вариант 2

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} a) & \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx; & b) & \int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}^{\arccos \frac{1}{\sqrt{26}}} \frac{12 \operatorname{ctg} x dx}{(6 + 5 \operatorname{ctg} x) \sin 2x}; \\ c) & \int_0^\pi 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^6 \frac{x}{2} dx; & d) & \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$a) y = 3x - x^2 + 4, \quad y = x^2 - 5x + 4; \quad b) r = 3 \sin 6\varphi \quad (\sin 3\varphi \leq 0).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right).$$

Вариант 3

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} a) & \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx; & b) & \int_{\pi/4}^{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4 + \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 18 \cos^2 x} dx; \\ c) & \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cdot \cos^4 \frac{x}{4} dx; & d) & \int_0^5 \frac{dx}{(25 + x^2)\sqrt{25 + x^2}} dx. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$a) y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1; \quad b) r = 3 \cos 4\varphi \quad (\cos 2\varphi \geq 0).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 3\pi).$$

Вариант 4

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} a) & \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx; & b) & \int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{37}}}^{\pi/4} \frac{6 \operatorname{tg} x}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x} dx; \\ c) & \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx; & d) & \int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$a) y = x^2 \sqrt{16 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 4); \quad b) r = 1 - 2 \sin 2\varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2).$$

Вариант 5

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} a) & \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx; & b) & \int_0^{\arcsin 3/\sqrt{10}} \frac{2 \operatorname{tg} x - 5}{(4 \cos x - \sin x)^2} dx; \\ c) & \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x dx; & d) & \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$a) x = \sqrt{4-y^2}, \quad x=0, \quad y=0, \quad y=1; \quad b) r = 4 \sin 2(\varphi - \frac{\pi}{4}), \quad r=2 \quad (r \geq 2).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

Вариант 6

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} a) & \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx; & b) & \int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx; \\ c) & \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \cos^8 x dx; & d) & \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$a) x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, \quad x=0, \quad y=1, \quad y=e^3; \quad b) r = \cos \varphi - \sin \varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

Вариант 7

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} a) & \int_{-1}^{\pi-1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos(x+1)} dx; & b) & \int_0^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx; \\ c) & \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cdot \cos^6 x dx; & d) & \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$a) y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, \quad y=0, \quad x=2, \quad x=1; \quad b) r = 1 - 2 \sin \varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t) \\ y = e^t(\cos t + \sin t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}).$$

Вариант 8

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} a) & \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx; & b) & \int_{-\arctg \frac{1}{3}}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx; \\ c) & \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cdot \cos^4 \frac{x}{2} dx; & d) & \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$a) y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, \quad y=0, \quad x=1; \quad b) r = 2 - \cos 2\varphi, \quad r=2 \quad (r \geq 2).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4 \sin^3 t \\ y = 4 \cos^3 t \end{cases} \quad (\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}).$$

Вариант 9

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx; & \text{b)} \int_{\pi/6}^{\arcsin \frac{5}{6}} \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{5 \sin^4 x + 2 \cos^4 x} dx; \\ \text{c)} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^6 x dx; & \text{d)} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = \arccos x, \quad y = 0, \quad x = 0; \quad \text{b)} r = 2 + \cos 2\varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t) \\ y = 3(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}).$$

Вариант 10

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \frac{x^3}{(1 - x^2)^2} dx; & \text{b)} \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx; \\ \text{c)} \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4} dx; & \text{d)} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2 - x^2)^{3/2}}. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} x = 4 - y^2, \quad x = y^2 - 2y; \quad \text{b)} r = 3 - \cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Вариант 11

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}; & \text{b)} \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{7}{8}}} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 7}; \\ \text{c)} \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} dx; & \text{d)} \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}); \quad \text{b)} r = 3 \cos \frac{3\varphi}{2}.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}).$$

Вариант 12

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_1^e \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx; & \text{b)} \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{7}{8}}} \frac{6 \sin^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx; \\ \text{c)} \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx; & \text{d)} \int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} x = \sqrt{e^y - 1}, \quad x = 0, \quad y = \ln 2; \quad \text{b)} r = \sin \varphi, \quad r = -\cos \varphi \quad (\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Вариант 13

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; & \quad \text{b)} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{2}{3}} \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx; \\ \text{c)} \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cdot \cos^6 x dx; & \quad \text{d)} \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = -\frac{\pi}{2}; \quad \text{b)} r = 4 \cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}\right).$$

Вариант 14

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx; & \quad \text{b)} \int_{-\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}}^0 \frac{11 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3} dx; \\ \text{c)} \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx; & \quad \text{d)} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = \cos^5 x \cdot \sin 2x, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}); \quad \text{b)} r = 2 \cos \varphi, \quad r = 1 \quad (r \leq 1).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}).$$

Вариант 15

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}; & \quad \text{b)} \int_{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{5}}} \frac{2 \operatorname{tg} x + 5}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x} dx; \\ \text{c)} \int_0^{2\pi} \sin^8 x dx; & \quad \text{d)} \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} x = (y-2)^3, \quad x = 4y-8; \quad \text{b)} r = 3 \sin 3\varphi, \quad r = \sin 3\varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t) \\ y = 8(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}).$$

Вариант 16

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx; & \quad \text{b)} \int_{\arcsin \frac{1}{10}}^{\pi/4} \frac{5 \operatorname{ctg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx; \\ \text{c)} \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 \frac{x}{2} dx; & \quad \text{d)} \int_0^2 \frac{2\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2} dx. \end{aligned}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = 2x - x^2 + 3, \quad y = x^2 - 4x + 3; \quad \text{b)} r = 4 \cos 2\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 6 \sin^3 t \\ y = 6 \cos^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}).$$

Вариант 17

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \sin x} dx; & \text{b)} \int_0^{\pi/4} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx; \\ \text{c)} \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx; & \text{d)} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}}. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = (x + 1)^2, \quad y^2 = x + 1; \quad \text{b)} r = \sin \varphi, \quad r = 2 \sin \varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t) \\ y = e^t(\cos t + \sin t) \end{cases} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi\right).$$

Вариант 18

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - \arctg^4 x}{1 + x^2} dx; & \text{b)} \int_{\pi/4}^{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx; \\ \text{c)} \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx; & \text{d)} \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^4} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} x = \arccos y, \quad y = 0, \quad x = 0; \quad \text{b)} r = \sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \quad r = \sqrt{2} \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2.5(t - \sin t), \\ y = 2.5(1 - \cos t), \end{cases} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi\right).$$

Вариант 19

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx; & \text{b)} \int_{\pi/4}^{\arccos \frac{1}{\sqrt{26}}} \frac{36}{(6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x} dx; \\ \text{c)} \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cdot \cos^6 x dx; & \text{d)} \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64 - x^2)^3}}. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = x\sqrt{36 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 6); \quad \text{b)} r = \sqrt{2} \cos 2\varphi - 1.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 3.5(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3.5(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

Вариант 20

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx; & \text{b)} \int_{-\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx; \\ \text{c)} \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx; & \text{d)} \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = x^2\sqrt{8 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}); \quad \text{b)} r = 1 - \sqrt{2} \cos \varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

Вариант 21

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx; & \text{b) } \int_{\arccos \frac{11}{12}}^{\pi/4} \operatorname{ctg}^5 x dx; \\ \text{c) } \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{x}{4} dx; & \text{d) } \int_0^{25} x^2 \sqrt{25 - x^2} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a) } y = x \cdot \operatorname{arctg} x, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{3}; \quad \text{b) } r = \sin \varphi - \cos \varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

Вариант 22

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx; & \text{b) } \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg}^6 x dx; \\ \text{c) } \int_0^{2\pi} \cos^8 \frac{x}{4} dx; & \text{d) } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a) } y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = e^3; \quad \text{b) } r = 2 - \sin 3\varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}).$$

Вариант 23

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_1^4 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx; & \text{b) } \int_{\arccos \frac{9}{7}}^{\pi/4} \frac{4 - 7 \operatorname{ctg} x}{2 + 3 \operatorname{ctg} x} dx; \\ \text{c) } \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx; & \text{d) } \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a) } y = \cos x \cdot \sin^2 x, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}); \quad \text{b) } r = 6 \sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \quad (\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}).$$

Вариант 24

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx; & \text{b) } \int_{-\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}}^{\pi/4} \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(\sin x + 3 \cos x)^2} dx; \\ \text{c) } \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx; & \text{d) } \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a) } y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \quad x = \ln 2; \quad \text{b) } r = \cos \varphi, \quad r = \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad (\pi \leq t \leq 2\pi).$$

Вариант 25

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx; & \text{b)} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x + 5 \cos x} dx; \\ \text{c)} \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^8 x dx; & \text{d)} \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1; \quad \text{b)} r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

Вариант 26

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx; & \text{b)} \int_{\pi/4}^{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 4} dx; \\ \text{c)} \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx; & \text{d)} \int_0^2 \frac{dx}{(4 + x^2)\sqrt{4 + x^2}}. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = x^2 \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 2); \quad \text{b)} r = \frac{1}{2} + \cos \varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 10 \cos^3 t \\ y = 10 \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

Вариант 27

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^2 \frac{x^3}{x^2 + 4} dx; & \text{b)} \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx; \\ \text{c)} \int_0^{2\pi} \cos^6 \frac{x}{4} \cdot \sin^2 \frac{x}{4} dx; & \text{d)} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4}{(4 - x^2)^{3/2}} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x; \quad \text{b)} r = \cos \varphi + \sin \varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

Вариант 28

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx; & \text{b)} \int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5} dx; \\ \text{c)} \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx; & \text{d)} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = (x - 2)^3, \quad y = 4x - 8; \quad \text{b)} r = 2 \cos \varphi, \quad r = 3 \cos \varphi.$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

Вариант 29

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^2} dx; & \text{b)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - 2 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx; \\ \text{c)} \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx; & \text{d)} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = x\sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 3); \quad \text{b)} r = 2 \cos 6\varphi \quad (\cos 3\varphi \geq 0).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Вариант 30

1. Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx; & \text{b)} \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}; \\ \text{c)} \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx; & \text{d)} \int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx. \end{array}$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$\text{a)} y = \sin x \cdot \cos^2 x, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}); \quad \text{b)} r = 2 \sin 4\varphi \quad (\sin \varphi \geq 0).$$

3. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$