Вариант 1

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{3n+1} = \frac{2}{3}.$$
2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
3) Доказать, что последовательность
$$x_n = \frac{(-3)^n + 3^n}{3^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n^\alpha, \quad \alpha$ – const $> 0, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = (-1)^n n \sin\frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \log_2(\log_2 n), \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-k+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
6) Используя теорему о пределе монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 2

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+3n+1} = 0.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 2$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{2^n + 5\cdot 6^n}{3^n + 6^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = (-1)^n \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = (1 + (-1)^n)\, n, \quad n \in \mathbb{N}$;

b) $x_n = (-1)^n 2^n + \frac{\sin n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$;

c) $x_n = 6 + 5n \sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$.

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{1^2+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2+1}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 3

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{6n+5}{5n+3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + n \sin \frac{\pi n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = 2^{\sin \frac{\pi n}{2}}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = \frac{(n!)^2}{3^n \cdot 4^n}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = -n\left(2 + (-1)^n\right), \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \alpha k}{2^k + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_{n+1} = x_n + 3, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_1 = 0.$$

Вариант 4

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2-1}+3}{\sqrt{3n^2-5n}+2} = 1.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{10n+7}{3n+8}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = (-1)^n \left(\frac{\cos n}{2} + \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+1}} \right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n\left(1 + \sin\frac{\pi n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = (-1)^n\left(3n + \frac{3}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \frac{2^{(-1)^n} + 2^{(-1)^{n+1}}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{(3k-2)(3k+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 5

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-3n^2}{1-n^2} = 3.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 2$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{2^n}{2^n - 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = (-1)^n \left(5 + \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = (-1)^n \frac{n^2}{n+5}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = n^2 \left(1 + \frac{\sin(\pi n/2)}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = n^2 \left(1 + (-1)^n\right), \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{101}{1} \cdot \frac{102}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{n+100}{5n-4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 6

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{n^2+n+1} = 3.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{6^n+7}{15^n+3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = n(-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = 1 + n\sin\frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{N};$

b)

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{n} + \frac{1}{n}, & n \text{ – четное} \\ n^{1/3} + \frac{1}{n}, & n \text{ – нечетное} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N};$$

c) $x_n = \frac{2^n}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_1 = 0.$$

Вариант 7

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt{2n^2+3}}{5-\sqrt{2n^2+3}} = -1.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{9n-3}{4n+7}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{(-2)^n + 2^n}{2^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n^3 + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$;

b) $x_n = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi n}{3} + 1\right) 2^n, \quad n \in \mathbb{N}$;

c) $x_n = (-1)^n \frac{n^2}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$.

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{(2k-1)(2k+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 8

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-3}{\sqrt{n^2+1}+3} = 1.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{9n+3}{2n+5}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = \sqrt{2} - \sin\frac{\pi n}{4}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a)

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}, & n \text{ – четное;} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}, & n \text{ – нечетное;} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N};$$

b) $x_n = (-1)^n \frac{n^2}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = n + \frac{\sin n!}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \ldots + \frac{1}{3^n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 9

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{n^2+2n} = 0.$$
2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{5n+7}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность
$$x_n = 2 + \frac{n}{n+1} \cdot \sin\frac{\pi n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n^2(1 + (-1)^n), \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = (-1)^n \frac{n^3}{n+8}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = 1000 + n^2 \cos\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2n-1}{2n^2-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_1 > 0.$$

Вариант 10

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cos n = 0.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{5n^2+1}{1-n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n+1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = 1 + n\cos\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = n(3+(-1)^n), \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \left(\frac{1}{2} - \cos\frac{\pi n}{3}\right)\ln n, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > -1.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{n+1}{3n^2-1}, \quad x_1 > 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 11

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3}{1-2^n} = -1.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{5n^2+7}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность
$$x_n = (-1)^n \left(3 - \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n + (-1)^n \frac{n^2}{n^2+2}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \begin{cases} -n - \frac{1}{n}, & n \text{ – четное;} \\ 2 - \frac{1}{n}, & n \text{ – нечетное;} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N};$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^3+k}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_n = \frac{101}{1} \cdot \frac{102}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{n+100}{5n-4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 12

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+100})=0.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a=1$ не является пределом последовательности
$$x_n=\frac{n^2}{1-4n^2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность
$$x_n=\frac{\sin n^2}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2},\qquad n\in\mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n=(-1)^n\left(n^2-1\right),\quad n\in\mathbb{N};$

b) $x_n=n\sin\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{N};$

c) $x_n=2^{(-1)^n},\quad n\in\mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k}{5^k-8},\quad n\in\mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Вариант 13

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n^2}{8n^3+3n} = 0.$$
2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{3-\ln n}{1+\ln n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
3) Доказать, что последовательность
$$x_n = 3^{n(-1)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n^2 + \sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = n^2\left(\frac{1}{2} + \sin\frac{\pi n}{6}\right), \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = n^2 + n^{(-1)n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k^2}{3^k+5}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{100+n}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_1 > 0.$$

Вариант 14

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{10+n^2} = -1.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{2^n - 1}{4^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность
$$x_n = 3 + \frac{1}{n} + \cos\frac{\pi n}{3}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n^2 \sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = (-1)^n n^2 + \frac{\sin n}{n}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \log_3 \log_2 n, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[4]{2^{4k} + k}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{10}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{5n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 15

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+3}{\sqrt{n^2+1}+5} = 1.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{9n+3}{2n+7}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность
$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \sin\frac{2\pi n}{5}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n\left(2 + (-1)^n\right), \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = 1 + n\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = n^2 + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n = \frac{n^2}{n^2-n+1} \cdot \cos\frac{\pi n}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^4+k}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 16

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4+3n}{n+1} = 3.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{9n-3}{4n+7}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{5^n + (-5)^n}{5}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_{n+1} = -nx_n,\ x_1 \neq 0, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = n - (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & n \text{ – четное;} \\ 1 + n, & n \text{ – нечетное;} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать расходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\cdot 5^{n-1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 17

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-7}{7n+5} = \frac{5}{7}.$$
2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = -7$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{3-6n^2}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
3) Доказать, что последовательность
$$x_n = \frac{(-2)^n + 5\cdot 2^n}{2^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = \sqrt{n}\,(2 + (-2)^n)\,, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = n^2 \left(1 + \sin\frac{\pi n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = (-1)^n \left(2n + \frac{1}{2n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n = \frac{n^2-1}{n^2-8}\cdot \sin\frac{\pi n}{3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_n = 4\cdot\frac{9}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n+7}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 18

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}\cdot\sin n^2}{n+1} = 0.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = -7$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{2^n + n}{4^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{\sin n}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = (-1)^n 2^n + \frac{\sin n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$;

b) $x_n = n^4 \sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$;

c) $x_n = (n^2+1)^{(-1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$.

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k(k+1))}{2^k + k}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 8}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x_1 > 0.$$

Вариант 19

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+n^2+2}\cdot\sin(n^2+n+1)}{n+2} = 0.$$
2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{-3n^2+2}{5n^2+4}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
3) Доказать, что последовательность
$$x_n = (-1)^n \left(\frac{\sin n}{3} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = (n^2+1)\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = \log_2(\log_2 n), \quad n \geq 2;$

c) $x_n = (-1)^n \ln n, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать расходимость последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_{n+1} = \frac{x_n+5}{2^n-1}, \quad x_1 > 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 20

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+5n+3} = \frac{1}{2}.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{2^n + n}{3^n + n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = 4 + \frac{\sin n}{n} + (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n^3 \sin^2 \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = (n+1)\left(2 + (-1)^n\right), \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & n \text{ – четное;} \\ 1 + \sqrt{n}, & n \text{ – нечетное;} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+1} = x_n(\sqrt[n]{n} - 1), \quad n \geq 2.$$

Вариант 21

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=5.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a=1$ не является пределом последовательности

$$x_n=\frac{3^n+1}{6^n+2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n=2+(-1)^n+\frac{1}{n^2},\qquad n\in\mathbb{N},$$

расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n=(1+(-1)^n)\log_2 n,\quad n\in\mathbb{N};$

b) $x_n=n^2\left(1+\cos\frac{\pi n}{2}\right),\quad n\in\mathbb{N};$

c) $x_n=\frac{2^n}{n},\quad n\in\mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n=\frac{n}{n+1}\cdot\sin^2\frac{\pi n}{3},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_{n+1}=\frac{x_n\cdot n^2}{3^{n-1}+4},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Вариант 22

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2+4n+5} = 1.$$
2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{2^n + 3 \cdot 6^n}{3^n + 6^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
3) Доказать, что последовательность
$$x_n = 2^{n(-1)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
расходится.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = (-1)^n \log_2 n, \quad n \in \mathbb{N};$
b) $x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{N};$
c) $x_n = n^2 + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать расходимость последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$, если
$$x_1 = \sqrt{6}, \quad x_2 = \sqrt{6 + x_1}, \ldots, \quad x_n = \sqrt{6 + x_{n-1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 23

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{2 - 3n^2}{4 + 5n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно:
$$x_1 = \frac{3}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{x_n^2}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Существует ли предел этой последовательности?

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = (n^2 + n + 1)\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = n(-1)^n + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}, & n \text{ – нечетное;} \\ \sqrt{n}, & n \text{ – четное;} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, выяснить, сходится ли последовательность
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{2^k + \sqrt{k}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_{n+1} = \frac{x_n \cdot n^2}{3^n - 1}, \quad x_1 > 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 24

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \sin^n \sqrt{n+1} = 0.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n + 2 \cdot 4^n + n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{(-7)^n + 7^n}{2 \cdot 7^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

не имеет предела.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = (-1)^n \log_2(n+1), \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \frac{(n!)^2}{2^n \cdot 3^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать расходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[5]{k}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = (x_n + 1)\left(\sqrt[n]{a} - 1\right), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad a > 0,\ a \neq 1.$$

Вариант 25

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+\cos^2 n}\ \operatorname{arctg} n\right)=0.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a=1$ не является пределом последовательности

$$x_n=\frac{2^n+3^n+4^n}{3\cdot 2^n+2\cdot 3^n+5\cdot 4^n},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n=1+\sqrt{n}\cos\frac{\pi n}{2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

не имеет предела.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n=n\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N};$

b) $x_n=2n^2+(-1)^n,\quad n\in\mathbb{N};$

c) $x_n=n^2\left(\frac{1}{4}+\frac{\sin(\pi n/6)}{2}\right),\quad n\in\mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2 k}{k(k+1)(k+2)},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Вариант 26

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + \arccos^2 \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \cdot \cos n \cdot \sin^2(n+1) = 0.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности
$$x_n = \frac{5^n + 12}{3 \cdot 5^n + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность
$$x_n = \frac{(-4)^n + 4^n}{12 \cdot 4^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
не имеет предела.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = 2^{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = (n^2+1)\sin^3 \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \begin{cases} n - \frac{1}{n}, & n \text{ – нечетное;} \\ \frac{\sin n}{n} - 1, & n \text{ – четное;} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = x_n \cdot \frac{\log_2 n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 27

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}} = \sqrt{3}.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{2n^3}{n^3-2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = \ln n \cdot \sin\frac{\pi n}{6}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

не имеет предела.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = n^{-\beta}, \quad \beta - \text{const} < 0, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = (-1)^n 3^n + \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = 2^{\cos\frac{\pi n}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\alpha k}{k^2}, \qquad \text{где } \alpha - \text{const} \neq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1+\frac{1}{1^2+8}\right)\left(1+\frac{1}{2^2+8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2+8}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 28

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)=0.$$
2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a=1$ не является пределом последовательности
$$x_n=\frac{2-3n^2}{4+5n^2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$
3) Доказать, что последовательность
$$x_n=2+\frac{(-1)^n}{n^2}+\sin\frac{\pi n}{12},\qquad n\in\mathbb{N}.$$
не имеет предела.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n=2^{n-\sqrt{n}},\quad n\in\mathbb{N};$

b) $x_n=\left(\sqrt{n}+n\right)\sin\frac{\pi n}{4},\quad n\in\mathbb{N};$

c) $x_n=(-1)^{n-1}\left(5n-\frac{5}{n}\right),\quad n\in\mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать расходимость последовательности
$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt[3]{k^4+1}},\qquad n\in\mathbb{N}.$$
6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_n=\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+7}{n+1},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Вариант 29

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2} = \frac{3}{2}.$$

2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a = 1$ не является пределом последовательности

$$x_n = \frac{1+3n}{6-n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Доказать, что последовательность

$$x_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}} \right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

не имеет предела.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n = (-1)^n \frac{n^2+1}{3n-8}, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $x_n = n^2 \left(1 + \sin \frac{\pi n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N};$

c) $x_n = \frac{2\sqrt{n}}{n^5+3}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности

$$x_n = 1 + n^{(-1)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{3^n + 2^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 30

1) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}=-7.$$
2) Непосредственно используя определение предела последовательности, доказать, что число $a=1$ не является пределом последовательности
$$x_n=\frac{1-2n^2}{2+4n^2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$
3) Доказать, что последовательность
$$x_n=\frac{(-7)^{n-1}-7^n}{4},\qquad n\in\mathbb{N}.$$
не имеет предела.

4) Определить, является ли последовательность ограниченной/неограниченной, бесконечно большой/бесконечно малой, сходящейся/расходящейся:

a) $x_n=(1+n)\cos\frac{\pi n}{8},\quad n\in\mathbb{N};$

b) $x_n=n^2+\sin^3\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{N};$

c) $x_n=\begin{cases} n+\frac{1}{n^2}, & n \text{ – нечетное;}\\ \frac{\cos n^3}{n}-1, & n \text{ – четное;}\end{cases}\qquad n\in\mathbb{N}.$

5) Используя критерий Коши, исследовать сходимость последовательности
$$x_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}},\qquad n\in\mathbb{N}.$$
6) Используя теорему о монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности
$$x_1>0,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+1},\qquad n\in\mathbb{N}.$$