Вопросы к экзамену

(физический факультет, 2 семестр 2015)

1. Формула Тейлора. Теоремы о представлении остаточного члена формулы Тейлора (в общей форме, в форме Лагранжа, Коши, Пеано).
2. Основные разложения по формуле Тейлора.
3. Понятие первообразной, неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла (неопределенный интеграл и дифференциал, линейность, интегрирование по частям, замена переменной).
4. Таблица первообразных. **Знать назубок! Уметь вывести.**
5. Интегрирование рациональной функции. Интегрирование некоторых иррациональностей (дробно-линейная, квадратичная, дифференциальный бином). Интегрирование тригонометрических функций.
6. Понятия разбиения отрезка, диаметра разбиения. Понятие интегральной суммы и предела интегральных сумм. Определение определенного интеграла Римана на отрезке и функции, интегрируемой по Риману на отрезке. Геометрический смысл определенного интеграла.
7. Необходимое условие интегрируемости функции по Риману.
8. Определение сумм Дарбу и интегралов Дарбу, их свойства.
9. Критерий существования определенного интеграла в терминах сумм Дарбу. Определение колебания функции на множестве. Критерий существования определенного интеграла в терминах колебаний.
10. Классы интегрируемых функций.
11. Свойства определенного интеграла. Определение интеграла по ориентированному промежутку.
12. Теоремы о среднем.
13. Определение интеграла с переменным верхним пределом. Непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом.
14. Определение интеграла с переменным нижним пределом и с двумя переменными пределами. Правило дифференцирования интеграла с переменными пределами.
15. Формула Ньютона-Лейбница.
16. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.
17. Замена переменной в определенном интеграле.
18. Понятия простой, простой замкнутой, гладкой, кусочно-гладкой, спрямляемой кривой. Свойство ломаной, вписанной в плоскую кривую. Формулы вычисления длины плоской кривой.
19. Понятие квадрируемой плоской фигуры, площади квадрируемой плоской фигуры. Критерии квадрируемости.
20. Понятие кривой площади 0. Доказать, что непрерывная и спрямляемая кривая имеют площадь 0.
21. Квадрируемость и площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора.
22. Метрическое пространство. Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$. Метрики ρ_0, ρ_1 и ρ_e, их эквивалентность.

23. Последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$. Сходимость последовательности в метрическом пространстве. Основные свойства сходящихся последовательностей (ограниченность, единственность предела, сходимость подпоследовательности, арифметические операции и др.) Критерий сходимости последовательности в n-мерном пространстве.

24. Лемма Больцано-Вейерштрасса для последовательности в пространстве $\mathbb{R}^n$.

25. Фундаментальная последовательность. Полнота пространства $\mathbb{R}^n$. Критерий Коши.

26. Понятие функции многих переменных. Определение предела функции многих переменных по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Предел и арифметические операции.

27. Элементраные свойства функций, связанные с пределами.

28. Понятие двойного и повторного пределов. Теорема о связи двойных и повторных пределов.

29. Определения непрерывности по Коши и по Гейне. Непрерывность на множестве. Непрерывность в изолированной точке.

30. Основные свойства непрерывных функций. Устойчивость знака непрерывной функции.

31. Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции.

32. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Теоремы Вейерштрасса.

33. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

34. Определение частной производной, дифференцируемости. Эквивалентность двух определений дифференцируемости.

35. Необходимые условия дифференцируемости. Достаточные условия дифференцируемости.

36. Дифференцируемость и производные сложной функции.

37. Дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала.

38. Достаточные условия равенства смешанных производных.

39. Дифференциал второго порядка (независимые, зависимые, линейно зависимые переменные).

40. Формула Тейлора.

41. Необходимые условия локального экстремума функции многих переменных.

42. Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных.

Задачи для подготовки к экзамену
(физический факультет, 2 семестр 2015)

1. С помощью формулы Тейлора вычислить
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}+\frac{1}{4}\sin\frac{2}{x}\right)^{x^2+\sin 3x}.$$

2. Вычислить
$$\lim_{x\to0+0}\frac{\int_1^{\cos x}\sqrt[3]{\ln t}\,dt}{\int_0^{\ln(1+x)}\sqrt[3]{\cos t}\,dt}.$$

3. Задачи на нахождение первообразных и вычисление определенных интегралов.

4. Интегрируема ли функция $f(x)=\frac{1}{x}$ на отрезке $[-1;\varepsilon]$, при $\varepsilon<0$? А на отрезке $[-1;0]$?

5. Исследовать интегрируемость на отрезке $[-1;1]$ функции
$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ — иррациональное;}\\ 1, & x\text{ — рациональное.}\end{cases}$$

6. Найти функцию $I(x)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+2x\cos t+x^2}\,dt$. Построить ее график.

7. Определить среднее значение функции $f(x)=\sin x\cos(x+t)$ на отрезке $[0;2\pi]$.

8. Найти $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}f(x)\,\frac{dx}{x}$, если $a>0$, $b>0$ и f непрерывна на $[0;1]$.

9. Найти $\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{3}e^{t^2}\,dt$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $x=1$ и $y=\frac{x}{1+x^2}$. Построить графики.

11. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически $x=a(1+\cos t)$, $y=b(t+\sin t)$, $t\in[0;2\pi]$. Построить график кривой.

12. Найти длину дуги кривой, заданной в полярных координатах $r=a(1+\cos\varphi)$. Построить график кривой.

13. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=a(1+\cos\varphi)$. Построить график кривой.

14. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0;3)$ функцию $f(x;y)=\sqrt[3]{2x+(y-3)^2}\cdot\sin x$.

15. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ в точке $(0;0)$ функции
$$f(x;y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

16. Вычислить, заменяя приращение функции дифференциалом
$$\sqrt[3]{(3,03)^2-(1,04)^3}.$$

17. Доказать, что если функция $u=u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$
то функция $v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ также удовлетворяет этому уравнению.

18. Доказать, что если функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

то функция

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \cdot u\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{x}{a^4t}\right)$$

также удовлетворяет этому уравнению.

19. Найти du, d^2u, если $u = f(\alpha x, \beta y^2, \gamma z - yx)$.

20. Функцию $f(x,y,z) = 2x^2 - xy - y^2 + 3z^3 - 4xz - 6x - 3y + 5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1,-2,-1)$.

21. Найти частные производные функции $z = z(x;y)$, если $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$.

22. В системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2+y^2), \qquad \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2+y^2),$$

перейти к полярным координатам.

23. Найти площадь прямоугольного треугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

24. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = xy \cdot \ln(x^2+y^2)$.

25. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x + y + z$, если $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

26. См. также задачи 3246, 3247, 3341–3347.