Задачи для подготовки к экзамену
(физический факультет, 1 семестр 2014г.)

1. Задачи на исследование сходимости последовательности. Уметь решать разными способами: по определению, непосредственным вычислением предела, с помощью теоремы о монотонной последовательности, с помощью критерия Коши. Например, исследовать сходимость последовательности

   a) $x_1 = 4, \quad x_n = \frac{13+3n}{5n-1} \cdot x_{n-1};$

   b) $x_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + \ldots + \frac{1}{4n-2}.$

   c) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$.

2. Уметь доказать по определению, что предел равен или не равен заданной величине. Например, доказать по определению, что

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4}{-n^3+1} = -\infty;$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \arcsin\left(\cos\dfrac{1}{x}\right) = 0;$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - 2x\sin\dfrac{5}{x}\right) \neq 1.$

3. Уметь исследовать свойства последовательности: ограниченность, монотонность, сходимость, б.б., б.м. Уметь вычислять верхний и нижний пределы последовательности. Например, установить, является ли ограниченной, монотонной, б.б., б.м., сходящейся последовательность

   a) $x_n = n^2 + \sin^3\frac{\pi n}{2};$

   b) $x_n = (n+1)\cos\frac{\pi n}{4}?$

4. Задачи на вычисление предела последовательности и функции. Уметь применять первый и второй замечательные пределы и следствия второго замечательного предела.

5. Уметь исследовать функцию на непрерывность и охарактеризовать точки разрыва. Например, исследовать на непрерывность и установить характер точек разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} x\arccos\left(\sin\frac{1}{x}\right), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \dfrac{e^{2x} - \cos x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^{x-\pi/2}, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6. Уметь исследовать функцию на дифференцируемость. Например:

   a) исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = |x-3| \cdot \sin(\pi|x|^p)$, $p \in \mathbb{Z}$;

   b) соединить функции $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+\sin x)}$ $(-\frac{1}{2} \le x \le 0)$ и $g(x) = e^{x-1}$ $(x > 1)$ линейной функцией $ax+b$ так, чтобы полученная функция была непрерывна. Что можно при этом сказать о ее дифференцируемости в точках $x = 0$ и $x = 1$?

7. Уметь вычислять производные любого порядка (первого, второго и т.д.) от сложных функций.

8. Уметь находить первый и второй дифференциалы функции в случае независимой и зависимой переменных. Например, найти второй дифференциал функции $y = e^{x^2}$ в случае, когда x — независимая переменная и в случае, когда $x = \sin t$.

9. Уметь записать уравнение касательной к кривой в данной точке, найти угол пересечения кривых.

10. См также задачи №720–728, 732–734, 741–744, 1029–1033, 1055-1064 из задачника Демидовича.