

**Вопросы для подготовки к зачету  
(физический факультет, 3 семестр)**

1. Числовой ряд. Понятие сходящегося и расходящегося ряда. Остаток ряда. Необходимые условия сходимости ряда. Критерий Коши сходимости числового ряда.
2. Сходимость (расходимость) обобщенного гармонического ряда.
3. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (сравнения, Коши, Даламбера, Раабе, Коши-Маклорена).
4. Понятие абсолютной и условной сходимости ряда.
5. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда Лейбница.
6. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле.
7. Теоремы о перестановке и перегруппировке членов ряда.
8. Определение поточечной и равномерной сходимости функционального ряда и функциональной последовательности.
9. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности (в терминах супремума).
10. Признаки равномерной сходимости функционального ряда (Вейерштрасса, Абеля, Дирихле).
11. Непрерывность суммы функционального ряда и предела функциональной последовательности. Теорема Дини.
12. Теорема о переходе к пределу для функционального ряда и функциональной последовательности.
13. Теорема о дифференцируемости суммы функционального ряда и предела функциональной последовательности.
14. Теорема об интегрируемости суммы функционального ряда и предела функциональной последовательности.
15. Степенные ряды. Определение и существование радиуса сходимости степенного ряда. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Теорема Коши-Адамара.
16. Теоремы об интегрируемости, непрерывности и дифференцируемости суммы степенного ряда. Радиус ряда, полученного дифференцированием или интегрированием степенного ряда.
17. Единственность разложения функции в степенной ряд. Ряды Тейлора. Условия существования разложения функции в ряд Тейлора.

**Задачи для подготовки к зачету по математическому анализу  
(Физический факультет, 3 семестр)**

1. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода от функции  $f(x, y) = xy^2$  между точками  $A(0; 1)$ ,  $B(1; 0)$  а) вдоль прямой; б) вдоль кривой  $x^2 + y^2 = 1$ .
2. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода от функций  $P(x, y) = xy^2$ ,  $Q(x, y) = x^2y$  от точки  $A(0; 1)$  до точки  $B(1; 0)$  а) вдоль прямой; б) вдоль кривой  $x^2 + y^2 = 1$ .
3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy.$$

4. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (x + y) dx dy, \quad D: y^2 = 2x, x + y = 4, x + y = 12.$$

5. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V xyz dx dy, \quad V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = -1/2.$$

6. Задачи на вычисление площадей и объемов.
7. Задача на вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейных интегралов.
8. Задача на вычисление массы пластинки с заданными границами и поверхностной плотностью.
9. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_L xy^2 dy - x^2y dx, \quad L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

10. Задача на вычисление массы тела с заданными границами и плотностью.
11. Найти площадь поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , заключенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 2x$ .
12. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода от функции  $f(x, y, z) = x + y + z$  по поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \leq a/2$ .
13. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy \quad \text{по части конуса } x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq a.$$

14. Найти поток векторного поля  $\vec{a} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}$  через поверхность  $x + 2y + 3z = 1$  при  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
15. Найти работу силы  $F = (x - y)\vec{i} + \vec{j}$  при перемещении материальной точки вдоль линии  $L: x^2 + y^2 = 4$  ( $y \geq 0$ ) от точки  $A(2; 0)$  до точки  $B(-2; 0)$ .
16. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k}$  вдоль контура  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = 1 - 2 \cos t - 2 \sin t$ .
17. Найти производную скалярного поля  $u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$  в точке  $M(1; 1; 1)$  по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности  $S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$ , образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.
18. Задачи на вычисление скалярных и векторных характеристик поля.

19. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left( \frac{n-2}{2n+1} \right)^{3n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

20. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} 2^{nx}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2} (x-3)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n \sin x}.$$

21. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \quad (0 \leq x < +\infty), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x} \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

22. Определить интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} x^n \quad (0 < \alpha < 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n.$$

23. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+6)x^{7n}.$$

24. Разложить функцию в степенной ряд в окрестности точки  $x_0$  и указать область сходимости ряда

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = -1, \quad x_0 = 1,$$
$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}, \quad x_0 = 0, \quad f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}, \quad x_0 = -1.$$

### Нужно уметь решать задачи:

- умение найти производную сложной функции и первообразную; знание таблицы производных и первообразных
- вычисление криволинейных, двойных, тройных, поверхностных интегралов в разных СК
- вычисление площадей плоских фигур (в разных СК, при помощи криволинейных интегралов)
- вычисление площадей поверхности
- вычисление объемов
- умение делать замену переменных в двойном-тройном интеграле
- вычисление длины кривой
- знать и уметь применять формулы Гаусса, Стокса, Остроградского
- вычисление потока через заданную поверхность, циркуляцию потока по заданному контуру, работу вдоль кривой,
- вычисление градиента, дивергенции, ротора, производной по направлению
- построение поверхностей уровня
- исследование сходимости числового ряда с положительными членами
- исследование сходимости знакопеременного числового ряда (установить вид сходимости: абсолютная или условная)
- исследование сходимости функционального ряда (указать вид сходимости для каждого значения аргумента из области определения)
- исследование характера сходимости функционального ряда (равномерная/неравномерная)
- нахождение области сходимости степенного ряда (интервал сходимости, поведение в граничных точках)
- разложить функцию в степенной ряд
- найти сумму ряда