Элементы математической логики

Язык, на котором говорит математика, точен. Как и любой язык, он содержит свои единицы. Такими единицами служат высказывания или утверждения. В русском языке высказыванию соответствует повествовательное предложение. Каждое утверждение в математике рассматривается с точки зрения его истинности или ложности. Например, предложение «*Земля вращается вокруг Солнца*» есть истинное высказывание, а предложение «*Число 6 делится на 4*» является ложным высказыванием. Предложение же «*Который час?*» вообще не является высказыванием.

Высказывания будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, \ldots$ Если высказывание A является истинным, то говорят, что оно принимает значение «*и*» – истина, и записывают: $A = и$. Если высказывание B является ложным, пишут: $B = л$.

Из высказываний можно получать новые высказывания с помощью следующих операций «и», «или», «не», называемых *булевыми*[1].

Определение 1. *Отрицанием* высказывания A называется такое высказывание, обозначаемое $\neg A$ (читается: «не A»), которое является истинным, если A ложно, и ложным, если A истинно. Эту ситуацию можно изобразить с помощью *таблицы истинности*

A	$\neg A$
и	*л*
л	*и*

Определение 2. *Конъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \wedge B$ (читается: «и A, и B»), которое истинно, если истинны оба высказывания A и B, и ложно, если хотя бы одно из высказываний ложно, т. е. в остальных случаях (см. таблицу):

A	B	$A \wedge B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

Определение 3. *Дизъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \vee B$ (читается: «или A, или B»), которое ложно, если ложны оба высказывания A и B, и истинно в остальных случаях (см. таблицу):

A	B	$A \vee B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

Кроме того, для составления высказываний используется еще следующая операция.

[1]В честь английского математика *Джорджа Буля* (1815–1864), считающегося отцом математической логики. Созданный им математический аппарат фактически в соединении с двоичной системой счисления привел к созданию цифрового электронного компьютера.

Определение 4. *Импликацией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \Rightarrow B$ (читается: «из A следует B» или «если A, то B»), которое ложно, если A истинно, а B ложно, и истинно в остальных случаях (см. таблицу):

A	B	$A \Rightarrow B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

То есть в математике из истинного утверждения можно получить только истинное, а из ложного может следовать как истинное, так и ложное высказывание.

Определение 5. *Эквиваленцией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \Leftrightarrow B$ (читается: «A эквивалентно B», или «A тогда и только тогда, когда B», или «A равносильно B», или «для A необходимо и достаточно B»), которое истинно, когда высказывания A и B истинны или ложны одновременно. Наряду с $A \Leftrightarrow B$ в эквиваленции используется запись: $A = B$.

Итак, при помощи логических операций построено множество высказываний, которое называют *алгеброй высказываний.*

Основные формулы алгебры высказываний:

1. $\neg(\neg A) = A$;
2. $A \wedge (\neg A) =$ *л*;
3. $A \vee (\neg A) =$*и*;
4. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$;
5. $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;
6. Законы *дистрибутивности* (распределительные законы):
   $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
   $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
7. $\big(A \Rightarrow B\big) = \big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big)$;
8. $\big(A \Rightarrow B\big) = \big((\neg A) \vee B\big)$;
9. $\big(\neg(A \Rightarrow B)\big) = \big(A \wedge (\neg B)\big)$.

Эти формулы могут быть доказаны сравнением соответствующих таблиц истинности.

Пример 1. Докажем последнюю формулу. Таблица истинности для утверждения в левой части имеет вид:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
и	*и*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

А таблица истинности для утверждения в правой части имеет вид:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

Сравнивая эти таблицы, видим, что утверждения в правой и левой части принимают одинаковые значения.

Упражнение. С помощью таблиц истинности доказать формулы 1–8.

Всем *теоремам* T в математике, как высказываниям, можно придать вид импликации двух утверждений:

$T = (A \Rightarrow B)$.

Высказывание A называют *условием* теоремы T или тем, что дано в теореме, а высказывание B – *заключением* теоремы T или тем, что требуется доказать. Также высказывание B называют *необходимым условием* для высказывания A, а высказывание A называют *достаточным условием* для высказывания B.

Пример 2. $T =$ «все натуральные числа, делящиеся на 4, делятся на 2» или иначе: $T =$ «если число x делится на 4, то число x делится на 2».

Здесь приведена импликация, которая истинна, и высказывание $B =$ «число x делится на 2» есть необходимое условие для высказывания $A =$ «число x делится на 4», а высказывание A является достаточным условием для высказывания B в этой теореме T.

Следующие импликации носят названия:

$T = (A \Rightarrow B)$ – *прямая теорема*:

$T = (B \Rightarrow A)$ – *теорема, обратная к предыдущей.*

Для доказательства теорем часто используется метод «от противного». Основанием этого метода является формула 7:

$$\big(A \Rightarrow B\big) \;\Leftrightarrow\; \big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big).$$

При таком доказательстве исходят из того, что верно утверждение $\neg B$ (т. е. предполагают, что B – ложно), и приходят к истинности утверждения $\neg A$ (т. е. получают, что A также ложно).

Следует отметить, что из истинности прямой теоремы в общем случае еще не следует истинность обратной к ней теоремы, как это видно из примера 2: в разобранном примере из утверждения B не следует утверждение A, потому что, как известно, существуют четные числа не кратные четырем (например, 2).

Однако существуют теоремы вида

$T = (A \Leftrightarrow B)$.

Здесь высказывание B является необходимым и достаточным для высказывания A, и наоборот. Такую теорему называют *критерий.*

Предикаты и кванторы

Определение 6. Суждение, зависящее от переменной величины, которое при подстановке значений переменного становится высказыванием, называют *предикатом.*

Пример 3. $A(x) =$ «студент x учится на физическом факультете» есть предикат, зависящий от одного переменного x. Здесь $A(x)$ – одноместный предикат. Неравенство $B(x, y) = x^2 + y^2 \geqslant 0$ представляет собой двуместный предикат.

Как и для высказываний, с помощью логических операций $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ можно строить новые предикаты, и мы получим *алгебру предикатов*. Новые предикаты и высказывания можно строить из предикатов также с помощью символов, называемых *кванторами*: $\exists$ – *квантор существования* (читается: «существует», «найдется»), и $\forall$ – *квантор всеобщности* (читается: «для любого», «для всякого», «для всех»).

Определение 7. $\forall x\ A(x)$ (читается: «*для всех x $A(x)$*») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен для всех x из его области определения, и ложно – в противном случае.

Пример 4. Утверждение «любой студент УрФУ учится на физическом факультете», которое формально можно записать в виде:
$\forall x \in$ УрФУ {студент x учится на физическом факультете},
есть ложное высказывание.

Утверждение «квадрат действительного числа есть число неотрицательное», формально записываемое в виде: $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^2 \geqslant 0$ – истинное высказывание.

Определение 8. $\exists x :\ A(x)$ (читается: «*существует x такой, что $A(x)$*») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен на каком-то конкретном x из его области определения, и ложно, если предикат $A(x)$ ложен при всех x из его области определения.

Пример 5. Утверждение «на физическом факультете учатся девушки», которое формально записывается в виде
$\exists x :$ {девушка x учится на физическом факультете} –
истинное высказывание, так как, конечно, на физическом факультете учится хотя бы одна девушка.

Высказывание $\exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 1 \leqslant 0$ – ложное.

Построим отрицание высказывания $\forall x\ \ A(x)$.

Если данное утверждение не имеет места, то суждение $A(x)$ имеет место не для всех x, т. е. существует элемент x, для которого $A(x)$ не имеет места:

$$\neg\big(\forall x\ \ A(x)\big) = \big(\exists x : \neg A(x)\big).$$

Пример 6. Один маленький мальчик очень грамотно построил отрицание утверждения «Все дети любят кашу». Он подумал и, решительно отодвинув от себя тарелку, сказал: «Не все».

Совершенно аналогично

$$\neg\big(\exists x :\ A(x)\big) = \big(\forall x\ \ \neg A(x)\big).$$

Таким образом, чтобы построить отрицание логической формулы, содержащей кванторы, необходимо квантор $\forall$ заменить на квантор $\exists$, а квантор $\exists$ заменить на квантор $\forall$ и предикат заменить на его отрицание.

Пример 7.

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall\, x\ \{\exists\, y:\ [\forall\, z\ A(x,y,z)]\}) = \\
= \exists\, x:\ \neg\{\exists\, y:\ [\forall\, z\ A(x,y,z)]\} = \\
= \exists\, x:\ \{\forall\, y\ \neg[\forall\, z\ A(x,y,z)]\} = \\
= \exists\, x:\ \{\forall\, y\ [\exists\, z:\ \neg A(x,y,z)]\}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что скобки можно частично или вовсе опускать при записи такого рода логических формул, если не возникает разночтений.