Полнота числовой прямой

Ограниченные множества действительных чисел

Определение 1. Непустое множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если найдется такое действительное число, что все элементы множества X больше или равны этому числу, т. е.

$$\exists\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad x \geqslant a.$$

При этом число a, ограничивающее множество X снизу, называется *нижней границей множества* X.

Непустое множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если найдется такое действительное число, что все элементы множества X не превосходят этого числа, т. е.

$$\exists\, b \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad x \leqslant b.$$

При этом число b, ограничивающее множество X сверху, называется *верхней границей множества* X.

Понятно, что если a – нижняя граница множества X, то $a - 1$ также будет нижней границей X, равно как и $a-2$ и любое число, меньшее a. То есть если множество ограничено снизу, то оно имеет бесконечно много нижних границ. Аналогично, ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних границ.

Определение 2. Наибольшая из всех нижних граней множества X называется *точной нижней гранью множества* X и обозначается $\inf X$ (читается: *инфимум* X).

Если ввести множество

$$Y = \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ – нижняя граница множества } X\},$$

то определение точной нижней грани может быть сформулировано следующим образом: $m = \inf X$, если

1) $m \in Y$;
2) $\forall\, a \in Y \quad a \leqslant m$.

Аналогичным образом определяется точная верхняя грань множества.

Определение 3. Наименьшая из всех верхних граней множества X называется *точной верхней гранью множества* X и обозначается $\sup X$ (читается: *супремум* X).

Если ввести множество

$$Z = \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ – верхняя граница множества } X\},$$

то определение точной верхней грани может быть сформулировано следующим образом: $M = \sup X$, если

1) $M \in Z$;
2) $\forall\, b \in Z \quad M \leqslant b$.

Определения инфимума и супремума множества X могут быть даны и в терминах элементов самого множества X, без привлечения дополнительных множеств Y и Z.

Определение 2′. $m = \inf X$, если
1) $\forall\, x \in X \quad m \leqslant x$;
2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in X \quad x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Первое условие этого определения говорит о том, что m является нижней границей множества X, а второе – что эта граница наибольшая, поскольку попытка увеличить число m приводит к тому, что это увеличенное число уже не ограничивает все элементы множества X снизу.

Аналогично – для супремума.

Определение 3′. $M = \sup X$, если
1) $\forall\, x \in X \quad x \leqslant M$;
2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in X \quad M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Определение 4. Множество X называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу, т. е.

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X\ :\ a \leqslant x \leqslant b.$$

Множество называется *неограниченным*, если оно неограничено хотя бы с одной стороны (сверху или снизу).

Теорема (о существовании точных граней)**.** *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань, причем только одну.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, т. е. найдется такое число $b \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant b$ для любого $x \in X$. Рассмотрим множество

$$Z = \{b \in \mathbb{R} :\ b \text{ – верхняя граница множества } X\}.$$

Тогда

$$\forall\, x \in X\ \forall\, b \in Z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant b.$$

Отсюда, по аксиоме непрерывности **VII**, найдется такое число $M \in \mathbb{R}$, что

$$x \leqslant M \leqslant b, \quad x \in X, b \in Z.$$

Это найденное число и будет супремумом множества X. Действительно, из левой части этого неравенства следует, что любой элемент множества X не превосходит числа M, что является определением верхней грани. Поскольку правая часть этого неравенства справедлива для любого $b \in Z$, это означает, что M не превосходит любой верхней грани, т. е. является наименьшей из всех верхних граней. По определению это означает, что $M = \sup X$.

Докажем единственность. От противного: пусть $M_1 = \sup X$ и $M_2 = \sup X$. Поскольку M_1 — точная верхняя грань, а M_2 — верхняя грань множества X (по определению точная верхняя грань сама является верхней гранью), мы получаем неравенство

$$M_1 \leqslant M_2.$$

Теперь, наоборот, посмотрим на M_1 как на одну из верхних граней, а на M_2 — как на наименьшую из всех верхних граней и получим

$$M_2 \leqslant M_1.$$

Их этих двух неравенств, по аксиоме антисимметрии $\mathbf{IV}_3$, следует, что $M_1 = M_2$, т. е. точная нижняя рань только одна.

Доказательство существования и единственности точной нижней грани предлагается провести самостоятельно по аналогии в качестве упражнения. $\square$

Заметим, что точные грани могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству. Например, если $X = [0, 1)$, то $\inf X = 0$ и принадлежит X, а $\sup X = 1$ и не принадлежит X.

Если множество X не ограничено сверху (снизу), то пишут

$$\sup X = +\infty \quad (\inf X = -\infty).$$

Принцип Архимеда и его следствия

Лемма. *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) подмножество множества целых чисел имеет максимальный (минимальный) элемент.*

Доказательство. Пусть множество $X \subset \mathbb{Z}$ ограничено снизу. Тогда по теореме о существовании точной нижней грани (теорема) оно имеет инфимум, обозначим его m. По определению точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент x_ε множества X такой, что $x_\varepsilon < m + \varepsilon$. Положим $\varepsilon = 1$. Тогда найдется $x_1 \in X$, удовлетворяющий неравенству

$$x_1 < m + 1. \tag{1}$$

Указанный элемент и есть минимальный в множестве X. Действительно, если предположить, что в X найдется элемент, меньший, чем x_1, то число $x_1 - 1$ будет принадлежать X. Но поскольку m ограничивает снизу все множество X, для числа $x_1 - 1$ также выполняется неравенство

$$x_1 - 1 \geqslant m \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \geqslant m + 1.$$

Последнее неравенство противоречит условию (1). Следовательно, наше предположение неверно и x_1 – минимальный элемент в множестве X. $\square$

Теорема (принцип Архимеда). *Пусть $h > 0$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется $k \in \mathbb{Z}$ такое, что*

$$(k-1)h \leqslant x < kh.$$

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим $\frac{x}{h} \in \mathbb{R}$. Введем в рассмотрение множество

$$Y = \left\{ p \in \mathbb{Z} \,|\, p > \frac{x}{h} \right\}.$$

Введенное множество ограничено снизу и является подмножеством $\mathbb{Z}$. Тогда, в силу леммы, оно имеет минимальный элемент:

$$\exists\, k = \min Y.$$

Тогда, поскольку k – элемент Y,

$$k > \frac{x}{h} \quad \Longleftrightarrow \quad x < kh.$$

Покажем, что $x \geqslant (k-1)h$. От противного: пусть

$$x < (k-1)h \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{h} < k - 1,$$

где $k - 1 \in \mathbb{Z}$. Тогда мы получаем, что число $k - 1$ также принадлежит множеству Y, но это значит, что k – не минимальный элемент. Получили противоречие. $\square$

Следствие 1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$

Доказательство. В формулировке принципа Архимеда положим $x = 1$ и $h = \varepsilon$. Тогда, согласно принципу Архимеда, найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $1 < n\varepsilon$. Отсюда следует, что n – положительное, а значит, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, получили, что $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Следствие 2. *Пусть $x \geqslant 0$. Если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $x < \varepsilon$, то $x = 0$.*

Доказательство. От противного: пусть $x > 0$. Тогда по следствию 1 найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$0 < \frac{1}{n} < x.$$

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Тогда для него имеем $x > \varepsilon$, что противоречит условию. □

Следствие 3.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ (a < b) \quad \exists\, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad a < \frac{m}{n} < b.$$

Доказательство. Для числа $b - a > 0$, по следствию 1 найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$0 < \frac{1}{n} < b - a. \tag{2}$$

В формулировке принципа Архимеда положим $x = a$ и $h = \frac{1}{n}$. Тогда найдется $m \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$\frac{m-1}{n} \leqslant a < \frac{m}{n}.$$

Покажем, что $\frac{m}{n} < b$. От противного: пусть $\frac{m}{n} \geqslant b$, тогда

$$\frac{m-1}{n} \leqslant a < b \leqslant \frac{m}{n}.$$

Отсюда следует, что

$$b - a \leqslant \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} = \frac{1}{n},$$

что противоречит условию (2). □

Следствие 4.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad k \leqslant x < k + 1.$$

Доказательство. Достаточно в формулировке принципа Архимеда взять $h = 1$. □

Определение 5. Число $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее условию

$$k \leqslant x < k + 1,$$

называется *целой частью числа x*.

Принцип Кантора

Определение 6. Если каждому натуральному $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие число $x_n \in \mathbb{R}$, то совокупность $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ называется *числовой последовательностью* и обозначается $\{x_n\}$, а число x_n называется *n-м элементом* последовательности.

Определение 7. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *вложенной*, если

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

Определение 8. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *стягивающейся*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N(\varepsilon) \quad b_n - a_n < \varepsilon.$$

(В этом случае говорят, что длины отрезков стремятся к нулю.)

Лемма (о вложенных стягивающихся отрезках)**.** *Любая последовательность вложенных стягивающихся отрезков имеет общую точку и при том только одну.*

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n < b_n$, так как левый конец отрезка меньше правого. Покажем, что

$$a_n < b_m, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

От противного: предположим, найдутся такие $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, что $a_n \geqslant b_m$. Тогда для отрезков с этими номерами получим

$$a_m < b_m \leqslant a_n < b_n.$$

То есть ни один из отрезков $[a_n, b_n]$ и $[a_m, b_m]$ не вложен в другой. Это противоречит условию вложенности отрезков (для вложенной последовательности отрезок с бóльшим номером лежит в отрезке с меньшим номером).

Итак, условие (3) выполнено. Тогда по аксиоме непрерывности действительных чисел (аксиома **VII**) найдется число $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$a_n \leqslant c \leqslant b_m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $n = m$ имеем

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что точка c принадлежит каждому из отрезков $[a_n, b_n]$, следовательно, принадлежит их пересечению:

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Покажем, что общая точка – одна. От противного: пусть

$$c_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], \quad c_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Рассмотрим $|c_1 - c_2| \geqslant 0$. Поскольку точки c_1, c_2 лежат в каждом отрезке $[a_n, b_n]$, расстояние между ними не превосходит длины отрезка:

$$0 \leqslant |c_1 - c_2| \leqslant b_n - a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По условию последовательность отрезков стягивающаяся, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n > N(\varepsilon) \quad b_n - a_n < \varepsilon.$$

Если выбрать $n > N(\varepsilon)$, то получим

$$0 \leqslant |c_1 - c_2| \leqslant b_n - a_n < \varepsilon.$$

Согласно следствию 2 из принципа Архимеда, это означает, что $|c_1 - c_2| = 0$, т. е. $c_1 = c_2$, и общая точка – одна. $\square$

Принцип предельной точки

Теорема (теорема Больцано–Вейерштрасса для множеств). *Любое ограниченное бесконечное подмножество* $\mathbb{R}$ *имеет предельную точку.*

Доказательство. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, X – ограничено, т. е. найдутся два числа a и b такие, что

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad X \subseteq [a, b].$$

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам и рассмотрим две его половинки: $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$. Множество X – бесконечное, поэтому возможны два случая:

1) в каждом из отрезков $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ лежит бесконечное число элементов множества X;

2) в одном из отрезков $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ лежит бесконечное число элементов множества X.

В первом случае выберем для определенности левый отрезок и обозначим его $[a_1, b_1]$. Во втором случае выберем тот отрезок, который содержит бесконечное число элементов множества X, и обозначим его $[a_1, b_1]$.

Таким образом, мы получили

$$[a_1, b_1] \subset [a, b], \quad d_1 = b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

и $[a_1, b_1]$ содержит бесконечное число элементов множества X. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и рассмотрим две его половинки: $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Множество X – бесконечное, поэтому снова возможны два случая:

1) в каждом из отрезков $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ лежит бесконечное число элементов множества X;

2) в одном из отрезков $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ лежит бесконечное число элементов множества X.

В первом случае снова выберем левый отрезок и обозначим его $[a_2, b_2]$. Во втором случае выберем тот отрезок, который содержит бесконечное число элементов множества X, и его обозначим $[a_2, b_2]$.

Таким образом, мы получили

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b], \quad d_2 = b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$$

и $[a_2, b_2]$ содержит бесконечное число элементов множества X. И так далее.

На n-м шаге разделим отрезок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ пополам и рассмотрим две его половинки. Снова, в силу бесконечности множества X, возможны два случая:

1) в каждом из отрезков $[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}]$, $[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}]$ лежит бесконечное число элементов множества X;

2) в одном из отрезков $[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}]$, $[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}]$ лежит бесконечное число элементов множества X.

В первом случае снова выберем левый отрезок и обозначим его $[a_n, b_n]$. Во втором случае выберем тот отрезок, который содержит бесконечное число элементов множества X, и его обозначим $[a_n, b_n]$.

Таким образом, мы получим

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \ldots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b],$$

$$d_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

и $[a_n, b_n]$ содержит бесконечное число элементов множества X.

Этот процесс не прервется, поскольку множество X содержит бесконечное число элементов. Тогда мы получим последовательность вложенных отрезков. Докажем, что построенная последовательность – стягивающаяся. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и решим неравенство

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \quad \Longleftrightarrow \quad n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Положим $N = \max\{[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}] + 1, 1\}$. Такой выбор гарантирует нам, что $N \in \mathbb{N}$ и

$$\forall\, n > N \quad \Longrightarrow \quad n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

По лемме о вложенных стягивающихся отрезках

$$\exists\, c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Покажем, что построенная точка c – предельная точка множества X. Возьмем произвольную окрестность точки c, $O(c)$, и впишем в нее симметричную ε-окрестность

$$O_\varepsilon(c) \subseteq O(c).$$

Для этого ε, в силу того, что последовательность отрезков – стягивающаяся,

$$\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N(\varepsilon) \quad b_n - a_n < \varepsilon.$$

Зафиксируем $n_0 > N(\varepsilon)$, тогда

$$[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset O_\varepsilon(c),$$

а по построению отрезок $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ содержит бесконечное число элементов множества X. Таким образом, получили, что в любой окрестности точки c лежит бесконечное число элементов множества X, что по определению означает, что точка c – предельная точка множества X. $\square$