14. Непрерывность функции многих переменных

14.1. Непрерывность в точке. Локальные свойства непрерывных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in X$.

Определение 14.1. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\forall\, O(f(x_0)) \;\; \exists\, O(x_0) \;\; \forall\, x \in X \cap O(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in O(f(x_0)),$$

или

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x \in X \quad (\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

или $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x \in X$

$$\left(\begin{array}{l} |x_1 - x_1^0| < \delta, \\ |x_2 - x_2^0| < \delta, \\ \qquad \vdots \\ |x_n - x_n^0| < \delta \end{array} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Если $x_0 \in X'$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 14.2. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$, $x_0 \in X$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\forall \{x^p\} \subset X \quad \left(\lim_{p\to\infty} x^p = x_0 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} f(x^p) = f(x_0) \right).$$

Приведенные определения равносильны, что следует из эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне.

Теорема 14.1. *Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), то найдутся такие $O(x_0)$ и $r > 0$, что*

$$f(x) \geqslant r > 0 \quad (f(x) \leqslant -r < 0) \ \ \textit{при} \ \ x \in O(x_0) \cap X.$$

Доказательство. Если $x_0 \in X'$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \forall x \in O_\delta(x_0) \cap X \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $f(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, по нему найдем $\delta(\varepsilon)$ и для любого $x \in O_\delta(x_0) \cap X$ получим

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2},$$

т. е.

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0),$$

откуда

$$f(x) > r = \frac{f(x_0)}{2} > 0. \qquad \square$$

Как и для функции одной переменной, имеют место теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций. Формулировки и доказательства этих теорем те же, что и для функции одной переменной.

Теорема 14.2 (непрерывность сложной функции). *Пусть отображение $x = \varphi(t)$ определено в некоторой окрестности точки $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и непрерывным образом отображает ее в точку $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Тогда сложная функция $F(t) = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.*

Доказательство. Заметим, что для отображения

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

непрерывность в точке t_0 означает непрерывность каждой из функций $\varphi_i(t)$ в точке t_0 как функции m переменных, т. е. если $\{t^p\} \subset \mathbb{R}^m$ и $t^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} t_0$, то

$$\varphi(t^p) = (\varphi_1(t^p), \varphi_2(t^p), \ldots, \varphi_n(t^p)) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{p\to\infty}{\longrightarrow} (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = x_0.$$

Положим $x^p = \varphi(t^p)$, тогда $x^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. В силу непрерывности функции f, $f(x^p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$, т. е.

$$F(t^p) = f(\varphi(t^p)) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) = f(\varphi(t_0)) = F(t_0). \qquad \square$$

14.2. Непрерывность на множестве. Свойства функций, непрерывных на множестве

Определение 14.3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в каждой точке множества X.

Определение 14.4. Множество M из $\mathbb{R}^n$ называется *связным*, если любые две точки множества можно соединить непрерывной кривой, лежащей в этом множестве.

Напомним, что *непрерывной кривой* называется непрерывный образ отрезка

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $x_i(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 14.3. *Пусть G — связное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция f непрерывна на G и существуют $a \in G$ и $b \in G$ такие, что $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $c \in G$ такая, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Так как G — связное множество, существует непрерывная кривая

$$L \ : \ \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \quad\vdots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

соединяющая точки a и b и лежащая в G, т. е.
$a = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha))$, $b = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$ и $x = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in G$ при любом $t \in [\alpha, \beta]$.

Пусть $F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$. По теореме о непрерывности сложной функции функция $F(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $F(\alpha) = f(a)$, $F(\beta) = f(b)$, т. е. $F(\alpha) \neq F(\beta)$ и

C между $F(\alpha)$ и $F(\beta)$. Тогда по теореме о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции одного переменного найдется такая точка $\gamma \in (\alpha, \beta)$, что $F(\gamma) = C$, а тогда $c = (\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \ldots, \varphi_n(\gamma)) \in G$ — искомая точка.$\square$

Теорема 14.4 (первая теорема Вейерштрасса)**.** *Любая непрерывная на компакте функция ограничена на нем.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на компакте F. Предположим, что она не ограничена на F, т. е.

$$\forall\, E > 0 \;\; \exists\, x^E \in F \;\; |f(x^E)| > E.$$

Тогда, полагая E натуральными, получим

$$\begin{gathered} E = 1 \;\; \exists\, x^1 \in F \;\; |f(x^1)| > 1, \\ E = 2 \;\; \exists\, x^2 \in F \;\; |f(x^2)| > 2, \\ \ldots \\ E = p \;\; \exists\, x^p \in F \;\; |f(x^p)| > p, \\ \ldots \end{gathered}$$

Последовательность $\{x^p\}$ ограничена (что следует из ограниченности F), выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x^{p_k}\}$, и пусть a – ее предел. Поскольку F замкнуто, $a \in F$. Из непрерывности функции f следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{p_k}) = f(a)$, а из построения $\{x^p\}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x^{p_k})| = +\infty$. Полученное противоречие доказывает ограниченность функции f на компакте F. $\square$

Теорема 14.5 (вторая теорема Вейерштрасса)**.** *Непрерывная на компакте функция достигает своих точных граней.*

Доказательство полностью совпадает с доказательством этой теоремы для функции одной переменной.