- Критерий существования предела функции:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x;y) = \operatorname{Re} a \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x;y) = \operatorname{Im} a \end{cases}$$

- Арифметические операции над пределами.

Определение 10. Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in D$, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция *непрерывна на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ непрерывны в точке $(x_0;y_0)$.

Как и для функций действительного переменного, сумма, произведение, отношение, суперпозиция непрерывных функций комплексной переменной непрерывны.

Дифференцируемость

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве D и z_0 – внутренняя точка множества D.

Определение 11. *Производной функции* $f(z)$ *в точке* z_0 называется предел разностного отношения

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

Определение 12. Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0, если существуют комплексное число $A + iB$ и функция $\varepsilon(\Delta z)$ такие, что

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = (A+iB)\Delta z + \varepsilon(\Delta z), \tag{5}$$

где $\varepsilon(\Delta z) = o(\rho)$[9] при $\rho = |\Delta z| \to 0$.

Как и в случае действительного переменного,

Теорема 4. *Функция комплексного переменного $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(z_0)$.*

Доказательство. Действительно, если $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то, поделив равенство (5) на Δz и переходя к пределу при $\Delta z \to 0$, получим

$$\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = A + iB + \frac{\varepsilon(\Delta z)}{\Delta z} \to A + iB.$$

Отсюда, в частности, следует, что $f'(z_0) = A + iB$.

[9]Как и прежде, $o(\rho)$ – обозначение величины более высокого порядка малости по сравнению с ρ, т.е. $\varepsilon(\Delta z) = o(\rho) \Leftrightarrow \varepsilon(\Delta z)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$.

Обратно, если $f'(z_0)$ – предел разностного отношения, то величина

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)$$

является бесконечно малой при $\Delta z\to 0$. Следовательно, функция

$$\varepsilon(\Delta z):=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)-f'(z_0)\cdot\Delta z$$

является $o(\rho)$, откуда следует равенство (5) с $A+iB=f'(z_0)$. $\square$

Существование производной функции комплексного переменного налагает особые требования на её действительную и мнимую части, выражаемые равенствами, называемыми уравнениями Коши-Римана[10]. При выполнении этих условий функция оказывается бесконечно дифференцируемой.

Теорема 5. *Функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы в точке $(x_0;y_0)$ и в этой точке выполнены условия Коши-Римана*

$$\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial y},\qquad \frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial x}. \tag{6}$$

Доказательство. *Необходимость.* Заметим сначала, что функция $\varepsilon(\Delta z)$ в определении дифференцируемости (5), как и всякая функция комплексного переменного, имеет свою действительную и мнимую части:

$$\varepsilon(\Delta z)=\alpha(\Delta x;\Delta y)+i\beta(\Delta x;\Delta y),\qquad \text{где}\ \ \Delta z=\Delta x+i\Delta y.$$

Выпишем теперь действительную и мнимую части равенства (5):

$$\begin{aligned} u(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-u(x_0;y_0)&=A\Delta x-B\Delta y+\alpha(\Delta x;\Delta y),\\ v(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-v(x_0;y_0)&=B\Delta x+A\Delta y+\beta(\Delta x;\Delta y). \end{aligned} \tag{7}$$

Из свойства $\varepsilon(\Delta z)=o(\rho)$ и неравенств

$$|\,\alpha(x;y)|=|\operatorname{Re}\varepsilon(z)|\leqslant|\,\varepsilon(z)|,\qquad |\,\beta(x;y)|=|\operatorname{Im}\varepsilon(z)|\leqslant|\,\varepsilon(z)|,$$

следует, что $\alpha(\Delta x;\Delta y)=o(\rho)$ и $\beta(\Delta x;\Delta y)=o(\rho)$. В таком случае равенства (7) служат определениями дифференцируемости функций u и v в точке $(x_0;y_0)$, причём

$$A=\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial y},\qquad B=-\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial y}=\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial x}.$$

Достаточность. По определению дифференцируемости функций u и v в точке $(x_0;y_0)$

$$\begin{aligned} u(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-u(x_0;y_0)&=\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x_0;y_0)}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x;\Delta y),\\ v(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-v(x_0;y_0)&=\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x_0;y_0)}{\partial y}\Delta y+\beta(\Delta x;\Delta y), \end{aligned}$$

[10] Иногда их называют уравнениями Даламбера-Эйлера.

где $\alpha(\Delta x;\Delta y)=o(\rho)$ и $\beta(\Delta x;\Delta y)=o(\rho)$, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Сложим эти уравнения, умножая второе на мнимую единицу:

$$u(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-(u(x_0;y_0)+iv(x_0;y_0))=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x;\Delta y)+\frac{\partial v}{\partial x}i\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}i\Delta y+i\beta(\Delta x;\Delta y).$$

В левой части равенства получили приращение функции $f(z)$. В правой части, используя условия Коши-Римана, заменим, например, $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ на $-\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}f(z_0+\Delta z)-f(z_0)&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x;\Delta y)-\frac{\partial u}{\partial y}i\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}i\Delta y+i\beta(\Delta x;\Delta y)=\\&=\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)-i\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta x+i\Delta y)+\alpha(\Delta x;\Delta y)+i\beta(\Delta x;\Delta y)=\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta z+\varepsilon(\Delta z),\end{aligned}$$

где $\varepsilon(\Delta z)$ обозначена функция $\alpha(\Delta x;\Delta y)+i\beta(\Delta x;\Delta y)$, являющаяся $o(\rho)$.

Итак, мы показали, что приращение функции $f(z)$ в точке z_0 представимо в форме (5), что служит определением дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z_0. □

Следствие 1. *В частности, при доказательстве достаточности мы нашли формулу для вычисления производной функции $f(z)$:*

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

В силу условий Коши-Римана её можно записать следующим образом:

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следствие 2. *Другие формы записи условий Коши-Римана.*

Если выразить функцию $f(z)$ через полярные координаты:

$$f(z)=u(x;y)+iv(x;y)=u(r\cos\varphi;r\sin\varphi)+iv(r\cos\varphi;r\sin\varphi)=U(r;\varphi)+iV(r;\varphi),$$

то условия Коши-Римана принимают вид:

$$\frac{\partial U(r;\varphi)}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial V(r;\varphi)}{\partial\varphi},\qquad\frac{\partial U(r;\varphi)}{\partial\varphi}=-r\frac{\partial V(r;\varphi)}{\partial r}.\tag{8}$$

Если записать функцию $f(z)$ в экспоненциальной форме: $f(z)=R(x;y)e^{i\Phi(x;y)}$, то условия Коши-Римана принимают вид:

$$\frac{\partial R(x;y)}{\partial x}=R\frac{\partial\Phi(x;y)}{\partial y},\qquad\frac{\partial R(x;y)}{\partial y}=-R\frac{\partial\Phi(x;y)}{\partial x}.$$

Следствие 3. *Пусть $\overline{s}$ и $\overline{n}$ – ортогональные единичные вектора на комплексной плоскости. Будем считать, что поворот от $\overline{s}$ к $\overline{n}$ против часовой стрелки.*

Если функция $f(z)$ дифференцируема, то её производная может быть вычислена по любому направлению (при $\Delta z\to 0$ по любому направлению). Тогда, полагая $\Delta z=|\Delta z|\cdot\overline{s}$, получаем:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{|\Delta z|\to0}\frac{\Delta u(x;y)}{|\Delta z|\overline{s}}+i\frac{\Delta v(x;y)}{|\Delta z|\overline{s}}=\frac{1}{\overline{s}}\lim_{|\Delta z|\to0}\frac{\Delta u(x;y)}{|\Delta z|}+i\frac{\Delta v(x;y)}{|\Delta z|},$$

где приращения $\Delta u(x;y)$, $\Delta v(x;y)$ *получены в направлении вектора* $\overline{s}$, *следовательно,*

$$f'(z) = \frac{1}{\overline{s}}\left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial \overline{s}} + i\frac{\partial v(x;y)}{\partial \overline{s}}\right).$$

Аналогично,

$$f'(z) = \frac{1}{\overline{n}}\left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial \overline{n}} + i\frac{\partial v(x;y)}{\partial \overline{n}}\right).$$

Сравнивая действительные и мнимые части этих равенств и учитывая, что $\overline{n} = i\overline{s}$, *получаем обобщённые условия Коши-Римана:*

$$\frac{\partial u(x;y)}{\partial \overline{s}} = \frac{\partial v(x;y)}{\partial \overline{n}}, \qquad \frac{\partial u(x;y)}{\partial \overline{n}} = -\frac{\partial v(x;y)}{\partial \overline{s}}.$$

В частности, полагая $\overline{s} = (1;0)$ *и* $\overline{n} = (0;1)$, *получим классические условия (6).*

Пример 1. Исследуем функцию $f(z) = \overline{z}^2$ на дифференцируемость.

$$f(z) = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy, \qquad \text{т.е.} \quad u(x;y) = x^2 - y^2, \quad v(x;y) = -2xy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Все производные непрерывны, однако условия Коши-Римана выполнены только в нуле, следовательно, функция $f(z) = \overline{z}^2$ дифференцируема только в точке $z = 0$.

Легко видеть, что функция $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ дифференцируема во всех точках комплексной плоскости, причём

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z.$$