9.10. Исследование поведения функции при помощи производных

Определение и необходимые условия экстремума функции одного переменного

Определение 9.8. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в этой точке *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки x_0, в которой для всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)),$$

тогда точка x_0 называется *точкой строгого максимума (минимума)* функции.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремумами функции*.

Теорема 9.18 (необходимое условие точки экстремума). *Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.*

Доказательство. Пусть x_0 – точка минимума. Тогда

$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0$$

в некоторой окрестности этой точки. Если существует производная в точке x_0, то существуют правая и левая производные и они равны. Поскольку $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, то $f'_-(x_0) \leqslant 0$, а $f'_+(x_0) \geqslant 0$, т. е. $f'(x_0) = 0$. $\square$

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называют *точками, подозрительными на экстремум* (или *точками возможного экстремума*). Точки экстремума функции следует искать только среди точек, подозрительных на экстремум.

Теорема 9.19 (достаточное условие точки экстремума через первую производную)**.** *Если существует производная в окрестности точки x_0 и при переходе через эту точку она меняет знак, то точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, причем если*

$$f'(x) \leqslant 0 \text{ при } x < x_0 \quad \text{и} \quad f'(x) \geqslant 0 \text{ при } x > x_0,$$

то x_0 – точка минимума, а если

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ при } x < x_0 \quad \text{и} \quad f'(x) \leqslant 0 \text{ при } x > x_0,$$

то x_0 – точка максимума.

Доказательство. Пусть $x < x_0$. По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где $c \in [x, x_0]$. Если $f'(c) \leqslant 0$, то в силу того, что $x - x_0 < 0$, получим $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$. Аналогично для всех x справа от точки x_0 получаем $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, т. е. x_0 – точка минимума. □

Выпуклость функции на промежутке. Точки перегиба. Асимптоты

Определение 9.9. Функция f называется *выпуклой вниз (вверх) на* (a, b), если на любом $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ график функции лежит не выше (не ниже) хорды, соединяющей концы этого графика.

Определение 9.10. Точка на графике функции называется точкой перегиба, если при переходе через эту точку меняется направление выпуклости.

Теорема 9.20 (необходимое условие точки перегиба)**.** *Пусть точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, тогда если в этой точке есть вторая производная, то она равна нулю.*

Теорема 9.21 (критерий выпуклости через вторую производную)**.** *Пусть функция $f(x)$ имеет на (a, b) производную второго порядка. Для того чтобы $f(x)$ была выпуклой вниз (вверх) на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$).*

Определение 9.11. Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, то прямая $y = A$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $f(x)$. Аналогично при $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$. Если

$$\lim_{x \to x_0 - 0(+0)} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой.*

Прямая $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to +(-)\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +(-)\infty} [f(x) - kx],$$

называется *наклонной асимптотой* при $x \to +(-)\infty$.