18. Экстремум функции многих переменных

18.1. Определение и необходимые условия экстремума функции нескольких переменных

Определение 18.1. Пусть функция

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

определена в некоторой окрестности точки

$$x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки x_0, в которой для всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)). \tag{18.1}$$

Если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)),$$

то x_0 называются *точкой строгого максимума (минимума)* функции.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках называется *экстремумами функции.*

Теорема 18.1 (необходимое условие экстремума). *Если точка* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *является точкой экстремума функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и в этой точке существует частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, *то она равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной x_i:

$$g(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Существование конечной частной производной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i в точке x_0 эквивалентно дифференцируемости функции $g(x_i)$ в точке x_i^0. Очевидно, что функция $g(x_i)$ имеет в точке x_i^0 локальный экстремум. А тогда $g'(x_i^0) = 0$. Это означает, что $f'_{x_i}(x_0) = 0$. Теорема доказана. □

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то частные производные по всем переменным в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \qquad (18.2)$$

а следовательно,

$$df(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

Точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (18.2), называют *точками, подозрительными на экстремум* (или *стационарными точками*). Точки экстремума функции следует искать только среди точек, подозрительных на экстремум.

Оказывается, не любая стационарная точка является точкой локального экстремума дифференцируемой функции. Например, для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ (рис. 18.1) точка $(0; 0)$ является и стационарной:

$$df(0, 0) = 2x\,dx + 2y\,dy|_{(0,0)} = 0,$$

и точкой локального минимума:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geqslant 0 = f(0, 0),$$

а для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ (рис. 18.2) точка $(0; 0)$ является стационарной:

$$df(0, 0) = 2x\,dx - 2y\,dy|_{(0,0)} = 0,$$

но не является точкой локального экстремума, так как в любой окрестности точки $(0; 0)$ функция принимает и положительные и отрицательные значения:

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2, \quad f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2.$$

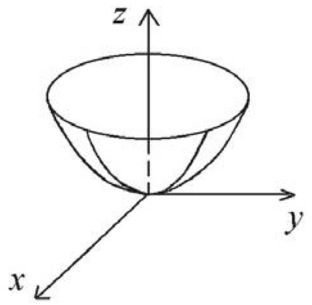

Рис. 18.1

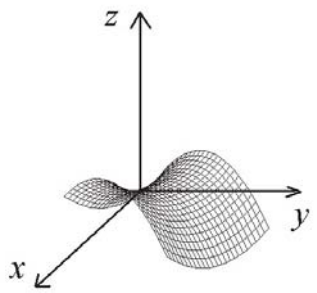

Рис. 18.2

Следовательно, для исследования локального экстремума нужны некоторые достаточные условия.

Предварительно вспомним алгебраические понятия.

18.2. Некоторые сведения о квадратичных формах

Функция вида

$$\Phi(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где a_{ij} – вещественные числа, называется *квадратичной формой* от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Числа a_{ij} называются *коэффициентами квадратичной формы*, а составленная из этих коэффициентов матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы.*

Если $a_{ij} = a_{ji}$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, то матрица A называется *симметричной.*

Определители

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \dots, \ A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы A.

Квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$ называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если для любых значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения.

Квадратичная форма называется *знакопеременной,* если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

В курсе алгебры доказывается

Критерий Сильвестра[26]

1. *Для того чтобы квадратичная форма* $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$ *с симметричной матрицей была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы были положительны:*

$$A_1 > 0, \dots, A_n > 0.$$

2. *Для того чтобы квадратичная форма* $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$ *с симметричной матрицей была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки её главных миноров чередовались следующим образом:*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad A_4 > 0, \dots$$

18.3. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных

Рассмотрим второй дифференциал функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$:

$$d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) dx_i dx_j.$$

---

[26] *Джеймс Сильвестр* (1814–1897) – известный английский математик. Основные работы посвящены алгебре, теории чисел, теории вероятностей, механике и математической физике; наиболее важными являются исследования по теории инвариантов и ее геометрические приложения.

Это выражение является квадратичной формой относительно дифференциалов независимых переменных dx_i. Матрица, составленная из коэффициентов этой квадратичной формы, будет выглядеть следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Теорема 18.2. *Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем в самой точке M_0 все частные производные второго порядка непрерывны. Пусть, кроме того, M_0 – стационарная точка. Тогда точка M_0:*

1) является точкой минимума функции, если второй дифференциал – положительно определенная квадратичная форма, т. е. в этой точке все главные миноры матрицы A положительны;

2) является точкой максимума, если второй дифференциал – отрицательно определенная квадратичная форма, т. е. в матрице A все главные миноры четного порядка положительны, а все главные миноры нечетного порядка отрицательны;

3) не является точкой экстремума, если второй дифференциал – неопределенная квадратичная форма, т. е. хотя бы один из определителей четного порядка меньше нуля.

Доказательство. Запишем приращение функции f в точке M_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(M_1) - f(M_0) = df(M_0) + \frac{1}{2} d^2 f(M_0 + \theta(M_1 - M_0)),$$

где $M_1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, $dx_i = \Delta x_i = x_i^1 - x_i^0$ $(i = 1, \ldots, n)$. По условию $df(M) = 0$, значит, формулу можно переписать следующим образом:

$$f(M_1) - f(M) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(M + \theta(M_1 - M)) \Delta x_i \Delta x_j.$$

Из непрерывности частных производных $f''_{x_i x_j}$ в точке M следует, что

$$f''_{x_i x_j}(M + \theta(M_1 - M)) \xrightarrow[\rho \to 0]{} f''_{x_i x_j}(M), \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^1 - x_i^0)^2}$ – расстояние между точками M и M_1. Поэтому их можно представить в виде

$$f''_{x_i x_j}(M + \theta(M_1 - M)) = f''_{x_i x_j}(M) + \alpha_{ij}(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n),$$

где $\alpha_{ij} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$. Таким образом,

$$f(M_1) - f(M) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(M) \Delta x_i \Delta x_j + \alpha(\rho)\rho^2,$$

где

$$\alpha(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_j}{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0.$$

Обозначим $h_i = \dfrac{\Delta x_i}{\rho}$. Тогда для $M_1 \neq M$

$$
\begin{aligned}
f(M_1) - f(M) &= \frac{1}{2}\rho^2 \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(M) h_i h_j + \alpha(\rho)\rho^2 = \\
&= \rho^2(\Phi(h_1, \ldots, h_n) + \alpha(\rho)),
\end{aligned}
$$

где

$$
\Phi(h_1, \ldots, h_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \quad a_{ij} = f''_{x_i x_j}(M).
$$

Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2 = 1$, т. е. функция $\Phi(h_1, \ldots, h_n)$ определена в точках n-мерной сферы единичного радиуса.

I. Рассмотрим сначала случай положительно определенной квадратичной формы $d^2 f(M)$. В этом случае функция $\Phi(h_1, \ldots, h_n)$, определенная на единичной сфере, принимает только положительные значения. Кроме того, очевидно, что $\Phi(h_1, \ldots, h_n)$ непрерывна, а область ее определения – ограниченное замкнутое множество. Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса, $\Phi(h_1, \ldots, h_n)$ достигает своего инфимума, т. е.

$$
\inf \Phi(h_1, \ldots, h_n) = \Phi(h_1^0, \ldots, h_n^0) = \mu > 0.
$$

Так как функция $\alpha(\rho)$ является бесконечно малой, то для достаточно малых ρ выполняется $|\alpha(\rho)| < \mu$. Поэтому для таких ρ

$$
f(M_1) - f(M) = \rho^2(\Phi(h_1, \ldots, h_n) + \alpha(\rho)) \geqslant \rho^2(\mu + \alpha(\rho)) > 0,
$$

т. е. точка M является точкой локального минимума.

II. В случае отрицательно определенной квадратичной формы $d^2 f(M)$ аналогично доказывается, что точка M – точка локального максимума.

III. Пусть $d^2 f(M)$ – знакопеременная квадратичная форма, т. е. существуют два набора $(t'_1, \ldots, t'_n)$ и $(t''_1, \ldots, t''_n)$ значений для $dx_1, \ldots, dx_n$ таких, что в точках первого набора $d^2 f(M)$ принимает положительное значение, а в точках второго набора – отрицательное значение. Это эквивалентно тому, что $\Phi(h'_1, \ldots, h'_n) > 0$ и $\Phi(h''_1, \ldots, h''_n) < 0$, где

$$h'_i = \frac{t'_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (t'_i)^2}}, \qquad h''_i = \frac{t''_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (t''_i)^2}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Введем точки M' и M'' с координатами $x'_i = x^0_i + \rho h'_i$ и $x''_i = x^0_i + \rho h''_i$ соответственно, где $\rho > 0$ – переменная величина. Легко посчитать, что $\rho(M', M) = \rho(M'', M) = \rho$. Для приращения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке M справедливы формулы

$$f(M') - f(M) = \rho^2(\Phi(h'_1, \ldots, h'_n) + \alpha'(\rho)),$$
$$f(M'') - f(M) = \rho^2(\Phi(h''_1, \ldots, h''_n) + \alpha''(\rho)),$$

где $\alpha'(\rho)$ и $\alpha''(\rho)$ – бесконечно малые при $\rho \to 0$. Поэтому для достаточно маленьких ρ выполняется

$$|\alpha'(\rho)| < \Phi(h'_1, \ldots, h'_n), \quad |\alpha''(\rho)| < \Phi(h''_1, \ldots, h''_n).$$

Итак, для сколь угодно малого ρ найдутся точки M' и M'', находящиеся на расстоянии ρ от точки M, в которых выполняется

$$f(M') > f(M), \quad f(M'') < f(M),$$

т. е. точка M не является точкой локального экстремума. Теорема доказана. □

Для функции двух переменных $f(x, y)$ достаточные условия экстремума могут быть сформулированы в более удобной для проверки форме.

Теорема 18.3. *Пусть функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки M и дважды непрерывно дифференцируема в самой точке M, которая является стационарной. Обозначим $A = f''_{x^2}(M)$, $B = f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$, $C = f''_{y^2}(M)$. Тогда если*

$$AC - B^2 > 0,$$

то M является точкой локального экстремума (локального максимума при $A < 0$ и локального минимума при $A > 0$), а если

$$AC - B^2 < 0,$$

то M не является точкой локального экстремума.

Замечание. В случае $AC - B^2 = 0$ для исследования на экстремум нужно привлекать дифференциалы более высокого порядка.

Пример 18.1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Единственная точка возможного экстремума – стационарная точка $(0, 0)$. В ней $A = 2 > 0$, $AC - B^2 = 4 > 0$. Следовательно, точка $(0, 0)$ – точка локального минимума.

Пример 18.2. $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Точка $(0, 0)$ тоже является единственной точкой возможного экстремума. Но в ней $AC - B^2 = -4 < 0$, поэтому у функции нет локальных экстремумов.

П р и м е р 18.3. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.
Находим частные производные первого порядка:

$$f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad f'_y = 6xy - 36.$$

Составляем систему уравнений для нахождения стационарных точек:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Выражая y из второго уравнения и подставляя в первое, получаем биквадратное уравнение

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0.$$

Таким образом, стационарными являются четыре точки: $(3, 2)$, $(-3, -2)$, $(2, 3)$, $(-2, -3)$. Вычисляем частные производные второго порядка:

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 6y, \quad f''_{y^2} = 6x.$$

В точке $(3, 2)$: $A = 18 > 0$, $AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум $f(3, 2) = -100$.

В точке $(-3, -2)$: $A = -18 < 0, AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет локальный максимум $f(-3, -2) = 152$.

В точках $(2, 3)$ и $(-2, -3)$ $AC - B^2 = 12^2 - 18^2 < 0$, следовательно, в этих точках локального экстремума нет.

18.4. Условный экстремум

На практике часто приходится искать экстремумы функции нескольких переменных при условии, что переменные некоторым образом связаны между собой.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена на открытом множестве D. Пусть на этом множестве заданы еще несколько функций

$$F_1(x_1, \dots, x_n), \ \dots, \ F_m(x_1, \dots, x_n), \quad m < n.$$

Будем предполагать, что переменные $x_1, \dots, x_n$ подчинены *уравнениям связи*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \quad \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{18.3}$$

Будем говорить, что функция f имеет *условный экстремум* (*условный максимум* или *условный минимум*) в точке $M_0 \in D$ относительно уравнений связи (18.3), если значение $f(M_0)$ является экстремальным (наибольшим или наименьшим) среди всех значений, принимаемых функцией f в некоторой окрестности точки M_0, точки которой удовлетворяют уравнениям связи.

Метод исключения нахождения точек условного экстремума

Для нахождения точек условного экстремума иногда возможен следующий достаточно простой способ: решаем систему (18.3) относительно $x_1, \dots, x_m$:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ &\dots \\ x_m &= g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

затем подставляем найденные значения в функцию f и исследуем полученную функцию $n-m$ переменных:

$$f(g_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_{m+1},\ldots,x_n),x_{m+1},\ldots,x_n),$$

на обычный локальный экстремум.

Если точка $(x^0_{m+1},\ldots,x^0_n)$ является точкой локального экстремума такой сложной функции, то точка $(x^0_1,\ldots,x^0_n)$, где

$$x^0_1=g_1(x^0_{m+1},\ldots,x^0_n),\ \ldots,\ x^0_m=g_m(x^0_{m+1},\ldots,x^0_n),$$

является точкой условного экстремума функции f относительно уравнений связи (18.3).

Пример 18.4. Найти экстремумы функции $f(x,y)=x^2+y^2$, если $F(x,y)=x+y-1$, т. е. если уравнение связи имеет вид: $x+y-1=0$.

Выражаем из уравнения связи y через x и подставляем в функцию f:

$$y(x)=1-x,\qquad f(x,y(x))=2x^2-2x+1.$$

Для этой функции точка $x_0=\frac{1}{2}$ является точкой локального минимума. Следовательно, точка $(x_0,y(x_0))=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ является точкой условного минимума функции $f(x,y)=$ $=x^2+y^2$ относительно уравнения связи $x+y=1$.

Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума. Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума

Способ, описанный выше, не всегда возможен, поскольку систему (18.3) не всегда удается разрешить. В этом случае можно воспользоваться *методом неопределенных множителей* (*методом Лагранжа*), который применяется для дважды дифференцируемых функций f, $F_1, \ldots, F_m$ и состоит в следующем (теоретическое обоснование метода из-за сложности опустим).

Рассмотрим новую функцию $n+m$ переменных:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_1 F_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m F_m(x_1, \ldots, x_n),$$

которую называют *функцией Лагранжа.*

I. На первом этапе находим точки возможного условного экстремума. Для этого нужно найти стационарные точки функции L, т. е. решить систему

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0 \\ \ldots \\ L'_{x_n} = 0 \\ L'_{\lambda_1} = 0 \\ \ldots \\ L'_{\lambda_m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_{x_1} + \lambda_1 (F_1)'_{x_1} + \ldots + \lambda_m (F_m)'_{x_1} = 0 \\ \quad \ldots \\ f'_{x_n} + \lambda_1 (F_1)'_{x_n} + \ldots + \lambda_m (F_m)'_{x_n} = 0 \\ F_1 = 0 \\ \quad \ldots \\ F_m = 0. \end{cases}$$

Если $(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ – стационарная точка функции L, то точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ – точка возможного условного экстремума функции f.

II. На втором этапе для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, найденной на первом этапе, рассматриваем свою функцию:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0),$$

и находим $d^2 g(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Далее, дифференцируя уравнения связи в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, получаем систему верных равенств

$$\begin{cases} (F_1)'_{x_1} dx_1 + \ldots + (F_1)'_{x_n} dx_n = 0, \\ \quad \ldots \\ (F_m)'_{x_1} dx_1 + \ldots + (F_m)'_{x_n} dx_n = 0. \end{cases}$$

Это линейная однородная система относительно переменных $dx_1, \ldots, dx_n$. Если ранг матрицы Якоби для функций $F_1, \ldots, F_m$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ равен m, то из этой системы можно выразить некоторые m дифференциалов переменных $x_1, \ldots, x_n$ через остальные дифференциалы.

Последний шаг: подставляем найденные дифференциалы в $d^2 g(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Получается некоторая квадратичная форма относительно $(n - m)$ переменных. Если эта квадратичная форма положительно определенная, то в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ – условный минимум, если отрицательно определенная – условный максимум, а если знакопеременная – условного экстремума нет.

Пример 18.5. Найти экстремум функции $f(x, y) = x^2 - y^2$, если $F(x, y) = x + y - 1$.

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Система для нахождения точек возможного условного экстремума

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ -2y + \lambda = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $x+y=0$, что противоречит третьему уравнению. Следовательно, система несовместна, и функция не имеет условных экстремумов.

Пример 18.6. Найти экстремум функции $f(x,y) = xy$, если $F(x,y) = x+y-1$.

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x+y-1).$$

Система для нахождения точек возможного условного экстремума:

$$\begin{cases} y+\lambda = 0 \\ x+\lambda = 0 \\ x+y = 1. \end{cases}$$

Единственным решением этой системы является набор $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$. Рассматриваем функцию

$$g(x,y) = L(x,y,\lambda_0) = xy - \frac{1}{2}(x+y-1).$$

Для нее $g''_{x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = g''_{y^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0$, $g''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = g''_{yx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 1$. Следовательно,

$$d^2 g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2dxdy.$$

Из уравнения связи находим зависимость между дифференциалами dx и dy: $dx+dy=0$. Подставляем значение $dy = -dx$ в $d^2 g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ и получаем отрицательно определенную квадратичную форму:

$$d^2 g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -2(dx)^2.$$

Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – это точка условного максимума функции $f(x, y) = xy$ относительно уравнения связи $x + y = 1$.

П р и м е р 18.7. На двух предприятиях отрасли необходимо изготовить 180 экземпляров некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x изделий на первом предприятии, равны $4x + x^2$ тыс. руб., а затраты, обусловленные изготовлением y изделий на втором предприятии, составляют $8y + y^2$ тыс. руб. Требуется определить, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты были минимальными.

Р е ш е н и е. Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f(x, y) = 4x + x^2 + 8y + y^2$$

при условии $x + y = 180$ (и, конечно, $x \geqslant 0, y \geqslant 0$). Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 4x + x^2 + 8y + y^2 + \lambda(x + y - 180).$$

Приравняем нулю частные производные функции L:

$$\begin{cases} 4 + 2x + \lambda = 0 \\ 8 + 2y + \lambda = 0 \\ x + y = 180. \end{cases}$$

Решением этой системы является набор $x_0 = 91$, $y_0 = 89$, $\lambda_0 = -186$. Этот набор удовлетворяет условию $x_0 \geqslant 0$, $y_0 \geqslant 0$. Для функции

$$g(x, y) = 4x + x^2 + 8y + y^2 - 186(x + y - 180)$$

дифференциал второго порядка в точке (x_0, y_0) равен

$$d^2g(x_0, y_0) = 2dx^2 + 2dy^2.$$

Эта квадратичная форма положительно определенная, поэтому нет необходимости находить зависимость между dx и dy из уравнения связи. Итак, точка $(91, 89)$ – точка условного минимума.

Ответ. Оптимальный способ размещения заказа: 91 изделие на первом предприятии и 89 – на втором. При этом затраты будут минимальными и составят 17 278 тыс. руб.

18.5. Наибольшие и наименьшие значения функции

До сих пор мы предполагали, что область определения рассматриваемой функции является открытым множеством. Для случая замкнутого ограниченного множества D и непрерывной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ благодаря теореме Вейерштрасса можно поставить вопрос о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции.

Если точка, в которой принимается одно из этих значений, является внутренней, то, очевидно, в этой точке функция имеет локальный экстремум. Но своего наибольшего (наименьшего) значения функция может достигать и на границе множества D.

Таким образом, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на замкнутом множестве D, следует найти все внутренние стационарные точки, точки недифференцируемости функции f, вычислить в них значения функции и сравнить их между собой и со значениями функции f в граничных точках множества D:

наибольшее (наименьшее) из всех этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции f на всем множестве D.

П р и м е р 18.8. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 y$ на множестве точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Найдем сначала стационарные точки в открытом круге $x^2 + y^2 < 1$:

$$\begin{cases} f'_x = 2xy = 0 \\ f'_y = x^2 = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются все точки открытого круга, у которых $x = 0$. Значения функции в этих точках равны 0.

Для нахождения экстремальных точек на границе круга исследуем функцию f на условный экстремум относительно уравнения связи $x^2 + y^2 = 1$. Выразим из этого уравнения $x^2 = 1 - y^2$ и подставим в $f(x, y)$, получим функцию $f(x(y), y) = y - y^3$. Эта функция имеет две экстремальные точки: $y_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $y_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Из уравнения $x^2 = 1 - y^2$ найдем соответствующие значения x и получим четыре точки: $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$, $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$. Вычислим значения функции $f(x, y)$ в полученных точках и сравним их со значениями функции f в точках ее возможного экстремума внутри круга $x^2 + y^2 = 1$. В нашем примере наибольшее значение функции $f(x, y)$ на указанном множестве есть $f_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а наименьшее – $f_{\min} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.