Интегралы от рациональных функций

Если рациональная дробь с действительными коэффициентами

$$\frac{P_n(x)}{Q_{k+2m}(x)}, \quad Q_{k+2m}(x) = (x-a)^k(x^2+2px+q)^m,$$

правильная, т. е. $n < k+2m$, то ее можно единственным образом представить в виде суммы простых дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_{k+2m}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \\ + \frac{b_1x+c_1}{x^2+2px+q} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+2px+q)^2} + \dots + \\ + \frac{b_mx+c_m}{(x^2+2px+q)^m}.$$

Интегралы от простых дробей имеют вид:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k} + C, \quad k \neq 1.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

3. $$\int \frac{dx}{x^2+2px+q} = \left[\begin{array}{c} u = x+p; \\ x^2+2px+q = u^2+q-p^2 \end{array} \right] = \\ = \int \frac{du}{u^2+q-p^2}\Big|_{u=x+p} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{q-p^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C, & q > p^2; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{p^2-q}} \ln\left|\dfrac{x+p-\sqrt{p^2-q}}{x+p+\sqrt{p^2-q}}\right|, & p^2 > q. \end{cases}$$

4. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+2px+q} = \int \frac{(u-p)du}{u^2+q-p^2}\Big|_{u=x+p}$,
что далее сводится к табличному интегралу и интегралу типа 3.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2px+q)^m} = \Big[u = x+p\Big] =$

$$= \int \frac{du}{(u^2+q-p^2)^m}\Big|_{u=x+p} = \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^m}.$$

Обозначим $I_m = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+a^2)^m}$ и выведем рекуррентную формулу для его вычисления:

$$\begin{aligned}
I_m &= \int \frac{du}{(u^2+a^2)^m} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^m}dx = \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{xd(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^m} = \\
&= \frac{1}{a^2}I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)a^2}\int xd\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}}\right) = \\
&= \frac{1}{a^2}I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}} - \\
&\qquad - \frac{1}{2(m-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}} = \\
&= \frac{2m-3}{2(m-1)a^2}I_{m-1} + \frac{x}{2(m-1)a^2(x^2+a^2)^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Такой метод спуска можно провести с любого натурального $m \geqslant 2$, пошагово понижая степень в знаменателе. Для $m = 2$ получим:

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} = \\
= \frac{1}{2a^2} \int \frac{du}{u^2+a^2} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} = \\
= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}.
\end{aligned}
$$

В качестве упражнения предлагаем читателю вывести соответствующую рекуррентную формулу для

$$
J_m = \int \frac{du}{(u^2-a^2)^m}
$$

самостоятельно.

Последний тип интегралов:

6. $\displaystyle \int \frac{xdx}{(x^2+2px+q)^m} = \Big[u = x+p\Big] =$

$$
= \int \frac{(u-p)\,du}{(u^2+q-p^2)^m}\Big|_{u=x+p} = \int \frac{(u-p)\,du}{(u^2 \pm a^2)^m},
$$

далее сводится к табличному интегралу и интегралу типа 5.

Таким образом, интеграл от рациональной функции всегда «берется» в элементарных функциях — конечным числом операций он приводится к вычислению табличных интегралов.