13. Предел функции многих переменных

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу поставлено в соответствие единственное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция многих переменных*. Если это правило обозначить f, то X называют областью определения, а Y — областью значений функции f. Обозначения:

$$y = f(x), \qquad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n,$$

т. е. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, или

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X.$$

При исследовании функции одной переменной часто используют ее график, который можно всегда изобразить на плоскости. График функции двух переменных изображают в трехмерном пространстве. Удобно в случае $n = 2$ независимые переменные обозначать x, y, а функцию — $z = f(x, y)$; в случае $n = 3$ независимые переменные обычно обозначают x, y, z, а функцию — $u = f(x, y, z)$.

Определение 13.1 (определение предела по Коши)**.** Пусть a — предельная точка множества X ($a \in X'$). Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall\, O(A) \;\; \exists\, O(a) \;\; \forall\, x \in X \cap \check{O}(a) \;\Rightarrow\; f(x) \in O(A).$$

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Напомним, что $\check{O}(a) = O(a) \backslash \{a\}$ есть *проколотая окрестность точки* a.

Если указаны радиусы окрестностей, то это определение запишется в виде

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x \in X \cap \check{O}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A),$$

или

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x \in X$$
$$(0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

или $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x \in X$

$$\left(\begin{array}{c} 0 < |x_1 - a_1| < \delta, \\ 0 < |x_2 - a_2| < \delta, \\ \vdots \\ 0 < |x_n - a_n| < \delta \end{array} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right).$$

Определение 13.2 (определение предела по Гейне)**.** Пусть $a \in X'$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке a, если

$$\forall\, \{x^p\} \subseteq X,\; x^p \neq a,\; x^p \to a \;\Rightarrow\; f(x^p) \to A.$$

Теорема 13.1 (об эквивалентности определений предела)**.** *Пусть* $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X'$ *и* $A \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \text{ (по Гейне)} \;\Leftrightarrow\; A = \lim_{x \to a} f(x) \text{ (по Коши)}.$$

Доказательство легко проводится по той же схеме, что и доказательство этой теоремы для случая функции одной переменной.

Определение 13.3. Пусть $a \in X'$. Говорят, что функция f *бесконечно большая в точке* a или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если

$$\forall\, E > 0 \ \ \exists\, \delta = \delta(E) > 0 \ \ \forall\, x \in X \qquad (0 < \rho(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x)| > E).$$

Если множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ не ограничено, то в нем существует такая последовательность $\{x^p\}$, что $\lim\limits_{p\to\infty} x^p = \infty$, или, если принять обозначение $x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$, то найдется такое $i = \overline{1,n}$, что $\lim\limits_{p\to\infty} x_i^p = \infty$.

Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если

(по Коши) $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \Delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall\, x \in X$

$$(x \in O_\Delta(\infty) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

или

(по Гейне) $\quad \forall\, \{x^p\} \subset X \ \ \left(\lim\limits_{p\to\infty} x^p = \infty \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} f(x^p) = A\right).$

П р и м е р 13.1. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

Здесь

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\};$$

точка $(0,0)$ — предельная точка области определения функции f.

Во многих задачах полезно пользоваться неравенством

$$|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

которое почти очевидно:

$$0 \leqslant (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|ab| + b^2 \iff 2|ab| \leqslant a^2 + b^2.$$

Применим его к функции f:

$$|f(x,y)| = \frac{|x^2 y|}{x^2+y^2} = |x|\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leqslant |x|\frac{x^2+y^2}{2(x^2+y^2)} = \frac{|x|}{2},$$

а $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{2} = 0$.

П р и м е р 13.2. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует, если

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0.$$

Возьмем последовательность точек $\left\{M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$, она стремится к точке $(0,0)$, но $M_n \neq (0,0)$.

$$f(M_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Возьмем другую последовательность $\left\{M_n'\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right\}$, она также сходится к $(0,0)$, и $M_n' \neq (0,0)$.

$$f(M_n') = f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5}.$$

Таким образом, $f(M_n)$ и $f(M_n')$ стремятся к разным пределам, значит, $f(x,y)$ не имеет предела в точке $(0,0)$ (согласно определению по Гейне).

Наряду с уже введенным понятием предела (для $n = 2$ он называется *двойным*, а для $n = 3$ — *тройным*) для функций многих переменных определяются повторные пределы. Мы рассмотрим случай $n = 2$.

Определение 13.4. Пусть функция $f(x, y)$ определена на декартовом произведении множеств X и $Y:\ X \times Y$ $(X \subseteq \mathbb{R},\ Y \subseteq \mathbb{R})$. Пусть $x_0 \in X'$, $y_0 \in Y'$. Пусть при каждом $x \in X$, $x \neq x_0$, существует $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$. Если существует

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y),$$

то этот предел называется *повторным пределом функции* $f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0).

Аналогично определяется второй повторный предел $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$.

Заметим, что повторные пределы функции $f(x, y)$, взятые в разных порядках, в общем случае не равны.

П р и м е р 13.3. Найдем повторные пределы функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0,$$

в точке $(0, 0)$:

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1,$$

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Заметим также, что из существования и равенства повторных пределов в общем случае не следует существование двойного.

П р и м е р 13.4. Для функции

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0,$$

повторные пределы равны:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

а двойного предела не существует (см. пример 13.2).

Тем не менее существует определенная связь между двойным и повторными пределами, которая выражается следующей теоремой.

Теорема 13.2. *Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $X \times Y$ и $x_0 \in X'$, $y_0 \in Y'$. Если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$ и для любого $x \in X,\ x \neq x_0$, существует $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, и он равен A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению двойного предела

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall\, (x,y) \in X \times Y$$
$$\left(\begin{matrix} 0 < |x-x_0| < \delta \\ 0 < |y-y_0| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

По определению однократного предела для любого $x \in X$, $x \neq x_0$,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, y \in Y \\ \left(0 < |y - y_0| < \widetilde{\delta} \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Возьмем $x \in X$ из проколотой δ-окрестности точки x_0 и рассмотрим разность $\varphi(x) - A$. Прибавим и отнимем в этом выражении $f(x, y)$ с $y \in Y$, $0 < |y - y_0| < \min\{\delta, \widetilde{\delta}\}$, и получим оценку

$$|\varphi(x) - A| = |\varphi(x) \pm f(x, y) - A| \leqslant \\ \leqslant |\varphi(x) - f(x, y)| + |f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = A$. $\square$