ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

1.1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ «ТИПЫ МАТРИЦ. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ»

1. 1. 1. Основные понятия матричной алгебры. Типы матриц

Определение 1. ***Числовой матрицей*** размерности $m \times n$ или $(m \times n)$ – матрицей, называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы, например, [ ], || ||.

Определение 2. Числа a_{ij} называются ***элементами матрицы***, где ij – индекс элемента, i – номер строки (i = 1,2,...m), j – номер столбца (j = 1,2,...,n).

Определение 3. Матрицы называются ***равными,*** если они имеют одинаковые размерности, и их соответствующие элементы равны, то есть $a_{ij} = b_{ij}$ (i = 1,2,...m; j = 1,2,...,n).

Классификацию матриц по размерности и по виду элементов представим в виде схемы (рис. 1.1.1).

Типовые задания

Пример 1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 6 & 12 & -7 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Указать размерность, элементы главной и побочной диагонали, элементы a_{12}, a_{31}, a_{23}.

Решение. Размерность матрицы $A_{3\times 3}$, так как она содержит три строки и три столбца.

Укажем элементы главной диагонали матрицы A : a_{11} = -1, a_{22} = 12, a_{33}=-3.

Укажем элементы побочной диагонали A : a_{31} = 6, a_{22} = 12, a_{13} = -5.

Укажем элементы a_{12} = 4, a_{31} = 6, a_{23} = -7 для матрицы A.

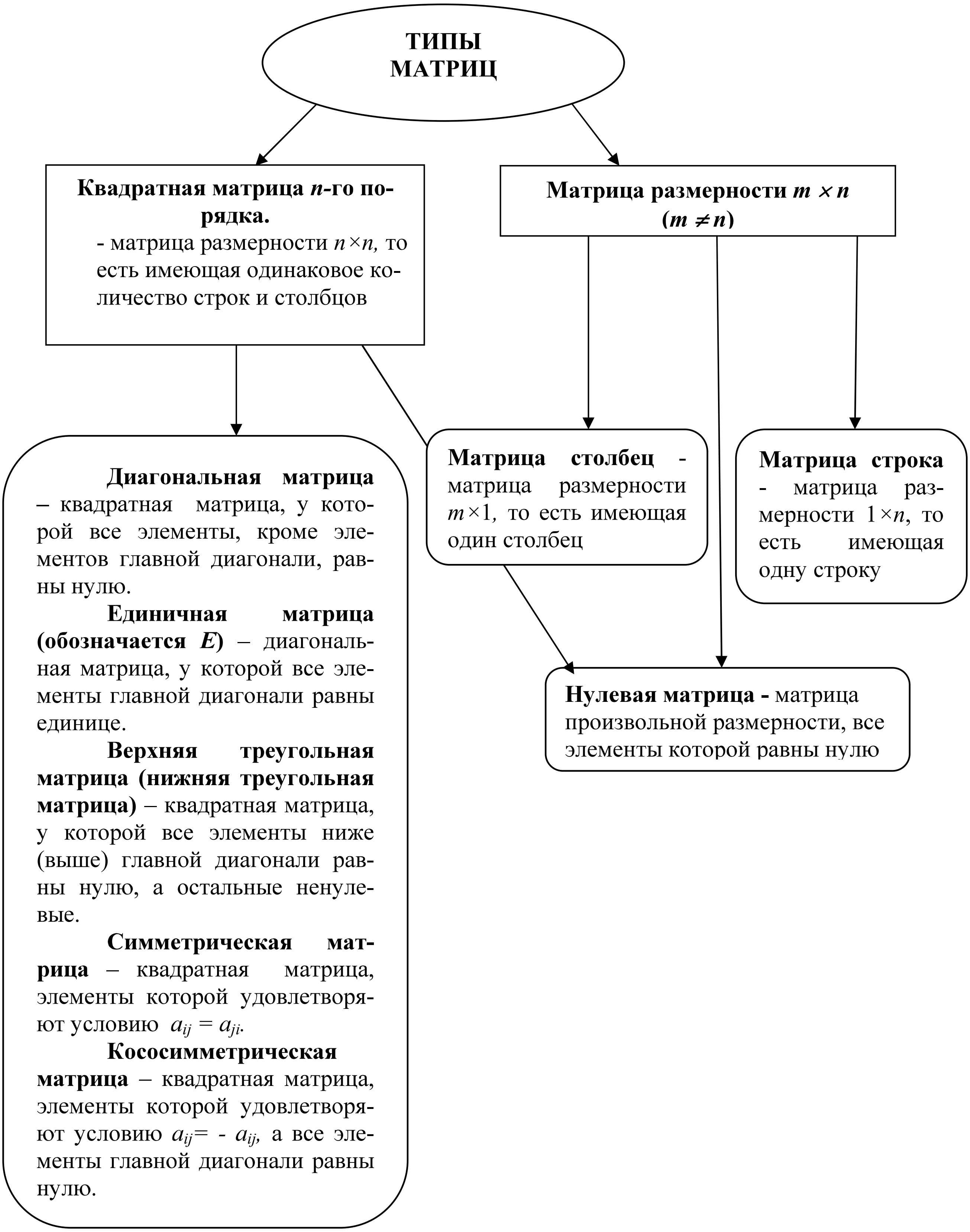

ТИПЫ МАТРИЦ
Квадратная матрица $\boldsymbol{n}$**-го порядка.** - матрица размерности $n\times n$, то есть имеющая одинаковое количество строк и столбцов
Матрица размерности $\boldsymbol{m\times n}$ $(\boldsymbol{m\neq n})$
Диагональная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.
Единичная матрица (обозначается $\boldsymbol{E}$**)** – диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.
Верхняя треугольная матрица (нижняя треугольная матрица) – квадратная матрица, у которой все элементы ниже (выше) главной диагонали равны нулю, а остальные ненулевые.
Симметрическая матрица – квадратная матрица, элементы которой удовлетворяют условию $a_{ij}=a_{ji}$.
Кососимметрическая матрица – квадратная матрица, элементы которой удовлетворяют условию $a_{ij}= - a_{ij}$, а все элементы главной диагонали равны нулю.
Матрица столбец - матрица размерности $m\times 1$, то есть имеющая один столбец
Матрица строка - матрица размерности $1\times n$, то есть имеющая одну строку
Нулевая матрица - матрица произвольной размерности, все элементы которой равны нулю

Рис. 1.1.1

Пример 2. Из данных матриц *A, B, C , D, E, F* указать верхнюю треугольную, диагональную, нулевую, единичную, кососимметрическую:

$$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&-3\\0&0&4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}0&-5&3\\5&0&-4\\-3&4&0\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Решение. Учитывая классификацию матриц по размерности и по виду элементов имеем, что верхняя треугольная матрица - $C=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&-3\\0&0&4\end{pmatrix}$, диагональная матрица - $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ и $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, нулевая матрица - $F=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, единичная матрица – $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, кососимметрическая матрица – $M=\begin{pmatrix}0&-5&3\\5&0&-4\\-3&4&0\end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix}1&4&5\\6&1&7\\8&2&-3\end{pmatrix}.$$

Указать размерность, элементы главной диагонали, элементы a_{12}, a_{32}, a_{21}.

2. Из данных матриц A, B, C , D, M, F указать треугольную, диагональную, нулевую, единичную, симметрическую:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\5&2&4\end{pmatrix},$$
$$D=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&4\\3&4&1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&3&4&1\\0&0&2&-5\end{pmatrix}.$$

1.1.2. Действия над матрицами

Над матрицами можно выполнять действия: сложение матриц, умножение матрицы на действительное число, умножение матрицы на матрицу, транспонирование матрицы.

Определение 4. ***Суммой матриц*** $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме соответствующих элементов матриц A и В: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$.

Замечание. 1) Операция вычитания матриц вводится аналогично.

2) Операции сложения и вычитания можно производить над матрицами одинаковой размерности.

Определение 5. ***Произведением матрицы $A_{m\times n}$ и числа*** α называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой является произведением соответствующего элемента матрицы A и числа α: $c_{ij} = \alpha\cdot a_{ij}$.

Замечание. Умножать на действительное число можно матрицы произвольной размерности.

Определение 6. ***Произведением матриц*** $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы A и j-того столбца матрицы B: $A_{m\times k} + B_{k\times n} = C_{m\times n}$.

Замечание. 1) Умножать матрицу A на матрицу B только при условии, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.
2) Операция возведения матриц в степень вводится через операцию умножения матриц. Возводить в степень можно только квадратные матрицы.

Определение 7. Матрица A^{T} называется ***транспонированной*** к матрице A, если выполняется условие $a^{\mathrm{T}}{}_{ij} = a_{ji}$, где $a^{\mathrm{T}}{}_{ij}$ – элемент матрицы A^{T}, a_{ij} – элемент матрицы A.

Замечание. Транспонировать можно матрицы произвольной размерности.

Определение 8. Матрицы A и B называются ***перестановочными***, если выполняется условие $A\cdot B = B\cdot A$.

Типовые задания

Пример 1. Найти матрицу $C = 2\cdot A + 5\cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, 5B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, C = 2\cdot A + 5\cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти $2A–3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим каждый элемент матрицы A на 2, а матрицы B на 3, после этого произведем операцию вычитания матриц:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

В результате получим

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 \\ 9 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти произведение матриц A и B, показать, что они не являются перестановочными, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем $A\cdot B$, $B\cdot A$ и сравним полученные матрицы:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\3&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+3\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot2 & 1\cdot0+3\cdot2+1\cdot1\\ 2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3 & 2\cdot1+0\cdot(-1)+4\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1\\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&7\\16&10&4\\13&5&7\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{pmatrix}\cdot=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot0+0\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot4+0\cdot3\\ 1\cdot1+(-1)\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3+(-1)\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot1+(-1)\cdot4+2\cdot3\\ 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot3+2\cdot0+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&6\\1&7&3\\8&11&14\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}8&0&7\\16&10&4\\13&5&7\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}4&6&6\\1&7&3\\8&11&14\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A\cdot B\neq B\cdot A$. – матрицы не являются перестановочными.

Пример 4. Найти матрицу, транспонированную к матрице A, где:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Заменим строки на соответствующие столбцы в матрице A:

$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4&7&1\\2&5&8&1\\3&6&9&1\end{pmatrix}$, при этом $a_{11}=a^{\mathrm{T}}{}_{11}=1$, $a_{21}=a^{\mathrm{T}}{}_{12}=4$ и так далее.

Пример 5. Найти A^3, если $A=\begin{pmatrix}3&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим квадрат матрицы A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+0 & 0+0 \\ 3-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27+0 & 0+0 \\ 6+1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$

Пример 6. Найти значение многочлена $f(x)=3x^2-3x-2$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Многочленом от матрицы A будет выражение

$$f(A) = 3A^2 - 3A + 2E,$$

или

$$f(A) = 3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 36 \\ -36 & 36 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Найти значения матричного многочлена $2 \cdot A^2 + 3 \cdot A + 5 \cdot E$, при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, если E – единичная матрица размерности 3×3.

Решение

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1+1+8 & 1+3+2 & 2+1+2 \\ 1+3+4 & 1+9+1 & 2+3+1 \\ 4+1+4 & 4+3+1 & 8+1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$2A^2=2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix},$$

$$3\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$5\cdot E=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$2\cdot A^2+3\cdot A+5\cdot E=\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решить уравнение $5\cdot A+3\cdot X\text{-}B=0$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -10 & -2 & -\frac{2}{3} & -\frac{25}{3} \\ -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{22}{3} & \frac{16}{3} \\ -3 & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Записать всевозможные произведения этих матриц и указать размерность результатов.

3. Даны матрицы A и B. Найти $A\cdot B$, если:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix},\ B=(5\ \text{-2}\ 3);$$

$$\text{г) } A=(7\ \text{-1}\ 4\ 0)\ ,\ B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 11\\ 0 & -11 & 19\\ 13 & 13 & 29\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3 & 11\\ 2 & 17\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}15 & -6 & 9\\ 20 & -8 & 12\\ 10 & -4 & 6\end{pmatrix}$; г) (17).

4. Доказать, что $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$, если

$$A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 0 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

*Ответ***:** $\begin{pmatrix}-11 & 100\\ -5 & 0\end{pmatrix}$.

5. Даны матрицы A и B. Найти $(A+3\cdot B)^2$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & -8\\ -3 & 6 & 9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}96 & 12 & 2\\ -18 & 54 & -8\\ 51 & 105 & 111\end{pmatrix}$.

6. Вычислить значение многочлена $f(A)$:

$$\text{а) } f(x)=x^3-2x^2+1,\ A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix};$$

$$\text{б) } f(x)=x^3-3x^2+2,\ A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\end{pmatrix}$.

7.Перемножив матрицы, упростить выражение:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$.

8. Вычислить матрицу $D = (A \cdot B)^{\mathrm{T}} - C^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить матрицу $M \cdot B \cdot C - 3E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ C = (2\ 0\ 5).$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 34 & 0 & 82 \end{pmatrix}$.

10*. Для матрицы A найти все перестановочные с ней квадратные матрицы B, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\ \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11*. Вычислить $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

Ответ: $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

12*.Доказать, что если для матриц A и B оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ определены, причем $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B квадратные одного и того же порядка.
13*. Показать, если A и B квадратные матрицы одного и того же порядка, причем $A \cdot B \neq B \cdot A$, то: а) $(A+B)^2 \neq A^2+2 \cdot A \cdot B+B^2$; б) $A^2-B^2 \neq (A+B) \cdot (A-B)$.
14*. Доказать, что диагональные матрицы перестановочные.

1.1.3. Определители и методы их вычисления

Каждой квадратной матрице

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можно однозначно поставить в соответствие число, которое называется ***определителем*** (детерминантом) матрицы n-го порядка:

$$\Delta A = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где порядок определителя соответствует порядку этой матрицы.

***Свойства определителей*:**

1. Величина определителя не изменяется при транспонировании соответствующей матрицы.
2. При перемене местами двух строк (столбцов) определителя он меняет знак.
3. Если все элементы некоторой строки (столбца) умножить на одно и тоже число, то определитель умножится на это число.
4. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя умножить на число и сложить с соответствующими элементами другой строки (столбца), то величина определителя не изменится.
5. Если в определителе две одинаковые строки (столбца), то определитель равен нулю.

6. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.
7. Если определитель содержит строки (столбцы), соответствующие элементы которых пропорциональны, то определитель равен нулю.
8. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме одной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые слагаемые, а во втором – вторые.
9. Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей матриц сомножителей: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
10. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Определение 9. Определитель, полученный из данного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, называется ***минором*** элемента a_{ij}, обозначается M_{ij}.

Определение 10. ***Алгебраическим дополнением*** элемента a_{ij} называется минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, обозначается A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \begin{cases} +M_{ij}, & i + j = 2k \;; \\ -M_{ij}, & i + j = 2k + 1. \end{cases} \text{ где } k \in N.$$

Теорема Лапласа. (о разложении определителя по элементам строки (столбца)). Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{11} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{in} \cdot A_{in}, \qquad (1.1.1)$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Методы вычисления:

1. определителя второго порядка:

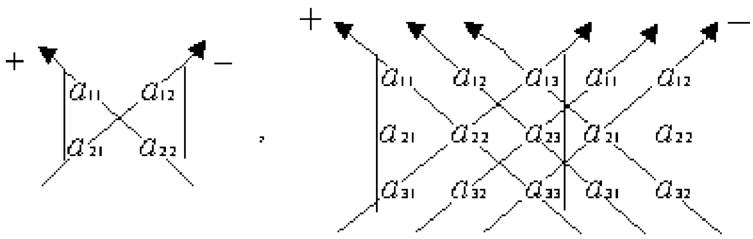
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}\ ; \qquad (1.1.2)$$

2. определителя третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}. \qquad (1.1.3)$$

Удобнее при вычислении определителей второго и третьего порядков использовать схемы (рис. 1.1.2)



(правило Саррюса)

Рис. 1.1.2

3.определителя произвольного порядка (выше второго):

а) методом понижения порядка;

б) метод сведения к треугольному виду.

***Алгоритм метода понижения порядка определителя*:**

1. Выбираем строку (столбец), содержащую элемент равный единице и элементы равные нулю (если таких элементов нет, то выбираем любую строку (столбец)).
2. Используя четвертое свойство определителя, «обнуляем» все элементы строки (столбца), кроме одного, то есть добиваемся того, чтобы все элементы выбранной строки (столбца), кроме одного, стали бы равняться нулю. При

обнулении элементов строки (столбца) работаем с элементами столбца (строки).
3. Используя теорему Лапласа, разлагаем определитель по элементам выбранной строки (столбца). Получаем определитель (n -1) - го порядка.
4. Алгоритм выполняем до тех пор, пока в разложении не появится определитель третьего или второго порядка.

Алгоритм метода сведения определителя к треугольному виду

1. Используя четвертое свойство определителя, последовательно «обнуляем» элементы в каждом из столбцов определителя, расположенные ниже элементов главной диагонали, то есть, сводим определитель к треугольному виду.
2. Используя девятое свойство определителя, вычисляем определитель.

Типовые задания

Пример 1. Вычислить определитель

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \qquad \text{б) } \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся схемой нахождения определителя второго порядка и формулой (1.1.2)

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = 4 - 6 = -2;\ \text{б) } \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -7 & 10 \end{vmatrix} = -1\cdot 10 - (-7)\cdot 6 = -10 + 42 = 32.$$

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель по правилу Саррюса (формула (1.1.3)):

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} 3\cdot 7\cdot 8 + 8(-1)(-5) + 4\cdot 2(-2) - 2\cdot 7(-5) - 8\cdot 4\cdot 8 - 3(-2)(-1) = \\ = 168 + 40 - 16 + 70 - 256 - 6 = 278 - 278 = 0. \end{array}$$

Пример 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ двумя способами: а) по правилу Саррюса; б) разложив по элементам строки (столбца).

Решение.

а) Вычислим определитель третьего порядка, используя правило Саррюса:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot1\cdot1 + 0\cdot2\cdot3 + 6\cdot4\cdot(-5) - 3\cdot1\cdot6 - (-5)\cdot2\cdot(-2) - 1\cdot4\cdot0 =$$

$$= -2 + 0 - 120 - 18 - 20 - 0 = -160.$$

б) Вычислим определитель по формуле (1.1.1), используя разложение по элементам первой строки, так как среди ее элементов есть ноль:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} =$$

$$= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot M_{11} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot M_{12} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\cdot M_{13} =$$

$$= -2\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot1\cdot(1+10) + 0 + 6\cdot1\cdot(-20-3) =$$

$$= -22 - 138 = -160$$

Так как в результате вычислений, произведенных двумя различными методами, получили одинаковые ответы, то можно сделать вывод о правильности расчетов.

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Пример 5. Вычислить определители, предварительно разложив их по какой-либо строке или столбцу:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}; \qquad \text{б)}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Обычно в таких случаях выбирают такой столбец или строку, в которой больше всего нулей.

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + +9(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(16-6) + 0 - 9(-6-2) = -20 + 42 = 52.$$

Данный определитель вычисляли, разложив по элементам второго столбца.

$$\text{б)}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(4-9-12+3) - (24+6-6-6-8+18) = 28 - 28 = 0.$$

Данный определитель вычисляли, разложив по элементам второй строки.

Пример 6. Вычислить определитель двумя методами: а) методом понижения порядка; б) методом сведения к треугольному виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение

а) Используя четвертое свойство определителей, «обнулим» все элементы первой строки, кроме элемента $a_{11}=1$, вычитая первый столбец определителя последовательно из остальных, и вычислим определитель, разлагая по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (6 + 8 + 0 - 0 - 12 - 18) = -16$$

Разложив полученный определитель по элементам первой строки, мы получили определитель третьего порядка и вычислили его по правилу Саррюса.

б) Приведем определитель к треугольному виду (удобнее приводить к виду нижней треугольной матрицы). Используем четвертое свойство определителей для того, чтобы получить в каждом столбце определителя нули выше элементов главной диагонали.

Умножим все элементы первого столбца определителя на (-1) и прибавляем последовательно к соответствующим элементам второго, третьего и четвертого столбцов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Далее умножаем элементы второго столбца полученного определителя на (-2) и прибавляем к элементам третьего столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

После этого элементы третьего столбца последнего определителя прибавляем соответственно к элементам четвертого столбца и считаем полученный определитель, как определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 4 = -16$$ (использовано десятое свойство определителей).

Пример 7. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Рассмотрим первый столбец и выберем в нем ту строку, которая содержит 1. Если единиц нет, то нужно эту единицу создать при помощи элементарных преобразований: переставляя строки или столбцы, складывая или вычитая их друг с другом, умножая или деля их на какое-либо число (учитывая при этом свойства определителей). Возьмем за основу вторую строку и получим при помощи ее нули в первом столбце:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

После этого на первую строку больше внимания не обращаем. Рассмотрим 2-й столбец. Здесь единиц нет, однако ее можно легко создать, например, если поменять местами 2-й и 3-й столбцы, или если от второй строки отнять четвертую. Далее повторяем предыдущую операцию, т.е. создаем нули во втором столбце:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 1 \end{vmatrix}.$$

Сейчас рассматриваем 3-й столбец, в котором уже имеется единица, при этом на первые две строки не обращаем внимание. Переставляем третью и четвертую строки и при помощи отмеченной единицы получаем нули в четвертой и пятой строках третьего столбца:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 99 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 66 & 26 \end{vmatrix}.$$

Осталось рассмотреть четвертый столбец. Вынесем общий множитель четвертой строки, равный 2, за знак определителя и поменяем местами две последние стоки. Далее воспользуемся тем, что 99 кратно 33:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 99 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 66 & 26 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 33 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 99 & 43 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 33 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

В результате, получилась треугольная матрица. Для того чтобы вычислить определитель, осталось только перемножить элементы матрицы, находящиеся на главной диагонали. Таким образом, получаем ответ:

$$-2(-1)(-1)\cdot 1\cdot 33\cdot 4 = -264.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить определитель:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}; \text{ г) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \text{ д) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix};$$

е) $\begin{vmatrix} 1 & в & 1 \\ 0 & в & 0 \\ в & 0 & -в \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$;

к) $\begin{vmatrix} 15325 & 15325 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$; л) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; м) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

н) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; о) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; п) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 26; б) 7; в) $2a$; г) -10; д) 87; е) $-2в^2$; ж) 48; з) 160; и) 5; к) -22198; л) 2; м) 1; н) 16; о) 54; п) 27.

2. Используя свойства определителей, доказать справедливость равенств:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 15 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} aв_1 + \beta c_1 & в_1 & c_1 \\ aв_2 + \beta c_2 & в_2 & c_2 \\ aв_3 + \beta c_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_1 + \alpha \cdot a_2 & в_1 + \alpha \cdot в_2 & c_1 + \alpha \cdot c_2 \end{vmatrix} = 0$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$.

3. Решить уравнение:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: а) x =-3; б) x_1 = -10, x_2 = 2.

4. Решить неравенство:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1; \qquad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

Ответ: а) $x \in \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$; б) $x \in (-6; -4)$.

5.* Доказать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

6.* Как изменится определитель, если:

а) к каждой строке, кроме последней, прибавить последнюю строку;

б) из каждой строки, кроме последней, вычесть все последующие строки;

в) из каждой строки, кроме последней, вычесть последующую строку, из последней строки вычесть первую строку;

г) его матрицу «перевернуть на 90° вокруг центра»;

д) первый столбец переставить на последнее место, а остальные передвинуть влево, сохраняя их расположение.

1.2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ « ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РАНГ МАТРИЦЫ»

1.2.1. Обратная матрица и методы ее нахождения

Определение 1. Квадратная матрица называется ***невырожденной***, или ***неособенной*****,** если ее определитель не равен нулю.

Определение 2. Матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов данной матрицы, называется ***союзной*****,** обозначается A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Определение 3. Матрица, полученная транспонированием союзной матрицы, называется ***присоединенной*****,** обозначается A^V:

$$A^V = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & \ldots & A_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 4. Следующие преобразования строк (столбцов) матрицы называются ***элементарными***:

1. перемена местами двух строк (столбцов) матрицы;
2. умножение строки (столбца) матрицы на любое число, отличное от нуля;
3. умножение элементов строки (столбца) матрицы на некоторое число и сложение их с соответствующими элементами другой строки (столбца);
4. транспонирование матрицы.

Определение 5. Матрица A', полученная из матрицы A путём конечного числа элементарных преобразований, называется ***эквивалентной*** к данной матрице А, обозначается $A' \sim A$ или $A' \to A$.

Теорема 1. Если A – невырожденная матрица ($\det A \neq 0$), то существует единственная матрица A^{-1}, для которой справедливо равенство

$$A\,A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \tag{1.2.1}$$

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** к матрице A.

Приведем алгоритмы нахождения обратной матрицы методом присоединенной матрицы и методом элементарных преобразований.

***Алгоритм метода присоединенной матрицы*:**

1. Находим определитель матрицы и убеждаемся, что она невырожденная, то есть $\det A \neq 0$.
2. Вычисляем алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A и составляем союзную матрицу A^*.
3. Протранспонируем союзную матрицу и получить присоединенную матрицу A^V, $(A^*)^{\mathrm{T}} = A^V$.
4. Находим обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^V . \tag{1.2.2}$$

5. Выполняем проверку, используя формулу (1.2.1).

***Алгоритм метода элементарных преобразований*:**

1. Составляем матрицу $B = (A \,|\, E)$, приписывая к A справа единичную матрицу того же порядка.
2. Используя элементарные преобразования только над строками матрицы B, приводим составленную матрицу B к виду $B = (E \,|\, C)$, что всегда возможно, если A – невырожденная.
3. Тогда $C = A^{-1}$.
4. Выполняем проверку используя формулу (1.2.1).

Типовые задания

Пример 1. Дана матрица A. Убедиться, что к ней существует обратная.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. По теореме 1 матрица имеет обратную, если:
а) матрица квадратная; б) матрица невырожденная ($\det A \neq 0$).
В нашем случае:

а) $A_{3\times 3}$ - квадратная;

$$\text{б) } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot -1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} =$$

$= 3 \cdot (-1) \cdot (10 - 1) + 2 \cdot (-1) \cdot (-1 - 8) = -27 + 18 = -9 \neq 0 \;\; \Rightarrow$ матрица A имеет обратную.

Пример 2. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) $\det A = -4$, где A - квадратная матрица размерности 3×3
2) Ищем алгебраические матрицы A (не забывать учитывать знаки алгебраических дополнений):

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \;\; A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -7, \;\; A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -8, \;\; A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9, \;\; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \;\; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \;\; A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Составляем из полученных алгебраических дополнений союзную матрицу:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

3) Записываем присоединенную матрицу $(A^{*})^{\mathrm{T}} = A^{V} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$

4) Находим обратную матрицу по формуле (1.2.2):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^V = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

5) Делаем проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, обратная матрица найдена правильно.

Пример 3. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

и $A_{11} = d$, $A_{12} = -$ c, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$, то

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Эту формулу можно использовать для нахождения обратных матриц второго порядка.

Пример 4. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований (методом Жордана – Гаусса):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Образуем расширенную матрицу, приписав справа к матрице A единичную матрицу E. После этого произведем элементарные преобразования строк расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -7/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -7/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 5/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -7/3 & 0 \\ -1/3 & 5/3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Получим запись нашего уравнения в матричном виде

$$A + X \cdot B = C,\ X \cdot B = C - A.$$

Используя определение обратной матрицы, о котором упоминается в теореме, умножая обе части равенства справа на B^{-1}, получим

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = (C - A) \cdot B^{-1},$$
$$X \cdot E = (C - A) \cdot B^{-1},$$

где $E = B \cdot B^{-1}$, а $X = (C - A) \cdot B^{-1}$ - искомая матрица.

Найдём B^{-1}:

1. $\det B = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 \neq 0$;

2. A_{11}= $(-1)^2 \cdot(-1)$ = -1, A_{12}= $(-1)^3 \cdot 5$ =-5 ,
A_{21}= $(-1)^3 \cdot(-2)$ = 2 , A_{22}= $(-1)^4 \cdot 3$ =3 .

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. $(A^*)^T = A^V = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $B^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Найдем X:

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 20 & -12 \\ 64 & -37 \end{pmatrix}.$$

$X = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} & \frac{-12}{7} \\ \frac{64}{7} & \frac{-37}{7} \end{pmatrix}$ - искомая матрица, являющаяся решением уравнения.

Пример 6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Данное уравнение коротко можно записать следующим образом: $AX = B$. Тогда решение будет иметь вид $X=A^{-1}B$, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, то $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. При каких значениях λ матрица A не имеет обратной, если

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти A^{-1}, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: б) $A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-10 & -9 & 14\\ 13 & 12 & -17\\ -4 & -3 & 5\end{pmatrix}$; в) $A^{-1}=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 3 & -13 & 41\\ -13 & -3 & 8 & -16\\ 18 & 3 & -3 & 6\\ -3 & -3 & 3 & -6\end{pmatrix}$;

д) $A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 1 & 4\\ 15 & 3 & -8\\ 25 & 9 & -14\end{pmatrix}$; е) $A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 7 & 6 & 4\end{pmatrix}$.

3. Вычислить матрицу $B = 11\cdot(A^{-1})^{\mathrm{T}}+ A^{\mathrm{T}}$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ -2 & -4 & -4 & -2\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 6 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричных уравнений и вычислить X^{-1}, Y^{-1}:

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ 2\cdot X+3\cdot Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{cases}.$$

6*. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & 1 & 2 & ... & n-1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$.

7*. Пусть A, B, C, D – невырожденные матрицы. Доказать, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} & (C - D \cdot B^{-1} \cdot A)^{-1} \\ (B - A \cdot C^{-1} \cdot D)^{-1} & (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

1.2.2. Ранг матрицы и методы его нахождения

Определение 6. Пусть дана матрица $A_{m\times n}$. Если вычеркнуть произвольным образом из этой матрицы некоторые строки и столбцы так, чтобы осталось k строк и k столбцов, то получится квадратная матрица k-го порядка. Определитель этой матрицы называется ***минором*** k-го порядка матрицы $A_{m\times n}$, обозначается M_k .

Определение 7. Максимальный порядок минора матрицы $A_{m\times n}$, отличного от нуля, называется ***рангом*** матриц*ы* и обозначается rang $(A) = r\,(A) = r$.

Замечание:

а) ранг матрицы не превышает наименьшего из чисел m и n, то есть

$$\text{rang}\,(A_{m\times n}) \le \min\,(m,\ n);$$

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A \equiv 0$;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r\,(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная;

г) ранг матрицы – это числовая характеристика матрицы произвольной размерности.

Обозначим в матрице A ее строки следующим образом:

$$e_1=(a_{11}\ \ a_{12}\ \ ...\ \ a_{1n}),\ e_2=(a_{21}\ \ a_{22}\ \ ...\ \ a_{2n}),\ \ ...\ ,\ e_m=(a_{m1}\ \ a_{m2}\ \ ...\ \ a_{mn}).$$

Определение 8. Две строки матрицы называются ***равными***, если равны их соответствующие элементы: $e_к = e_s$, если $a_{kj} = a_{sj}$, j=1,2,…n.

Определение 9. Строка e называется ***линейной комбинацией*** строк e_1, e_2, …, e_s матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа: $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_s e_s$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ – любые числа.

Определение 10. Строки матрицы e_1, e_2, ..., e_m называются ***линейно зависимыми,*** если существуют такие числа λ_1, λ_2, …, λ_m , не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке 0=(0 0 … 0): $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = 0$.

Теорема 2. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы.

Теорема 3 (***о ранге матрицы***): Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).

Приведем алгоритмы вычисления ранга матрицы методом окаймляющих миноров и методом элементарных преобразований.

***Алгоритм метода окаймляющих миноров*:**

1. Начинаем выбор с минора 1-го порядка, отличного от нуля (то есть с любого элемента не равного нулю).
2. Если найденный минор k-го порядка $M_k \neq 0$, то не интересуясь другими минорами k-го порядка, перейти к вычислению миноров (k+1) -го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M_k.
3. Если среди миноров (k+1) – го порядка найдется минор $M_{k+1} \neq 0$, то перейти к вычислению миноров (k+2) – го порядка и так далее.
4. Если обнаружится минор r – го порядка, такой, что все, окаймляющие его, миноры (r+1) – го порядка равны нулю, то rang(A) = r.

***Алгоритм метода элементарных преобразований*:**

1. Выполняем элементарные преобразования над матрицей A, чтобы свести ее к трапецевидной форме: $A_{m\times n} \sim A'_{m\times n}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1p} & a_{1p+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & a'_{2p} & a'_{2p+1} & \ldots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \ldots & a'_{3p} & a'_{3p+1} & \ldots & a'_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a'_{pp} & a'_{pp+1} & \ldots & a'_{pn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где

а) все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю;

б) либо все элементы последних (m-p) –строк обращаются в ноль, либо $m = p$;

в) все элементы главной диагонали a'_{11}, a'_{22}, a'_{33},…..a'_{pp} отличны от нуля.

2. В полученной матрице сразу виден минор максимального порядка, отличный от нуля:

$$M_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2p} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{pp} \end{vmatrix} = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_{33} \cdot \ldots\ldots a'_{pp} \quad \neq 0$$

3. Значит, ранг и есть порядок этого минора rang(A) = p.

Типовые задания

Пример 1. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Фиксируем минор 2-го порядка, не равного нулю:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Миноры 3-го порядка, окаймляющих M_2, равны нулю:

$$M_3' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \mathrm{M}_3'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, rang$A$=2, а минор M_2 – один из базисных миноров.

Пример 2. Найти ранг матрицы при помощи элементарных преобразований:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вначале будем осуществлять элементарные преобразования строк данной матрицы (меняем местами первую и третью строки, элементы первой строки прибавляем к элементам второй строки, элементы второй строки прибавляем к элементам третьей строки):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} :$$

далее работаем с ее столбцами (элементы первого столбца умножаем на -2 и прибавляем к элементам четвертого столбца, элементы второго столбца прибавляем к элементам четвертого столбца, элементы второго столбца умножаем на -2 и прибавляем к элементам третьего столбца):

$$: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получили, что rang (A) = 2, так как в последней матрице на главной диагонали расположены две единицы.

Можно было ограничиться работой со строками матрицы и свести ее к ступенчатой (трапецевидной) форме. В этой матрице уже легко увидеть минор отличный от нуля максимального порядка.

Пример 3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Доказать, что ее строки являются линейно зависимыми.

Решение. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выберем ненулевой минор 2-го порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Теперь найдем миноры 3-го порядка, окаймляющие минор M_2:

$$M_3' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3'' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, данная матрица имеет ранг rang$A$ = 2, а минор M_2 будет базисным. Тогда 1-я и 2-я строки:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

и 1-й и 2-й столбы:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

будут ***базисными.*** В соответствии с теоремой о базисном миноре все остальные строки и столбцы будут линейной комбинацией базисных строк и столбцов. Например, 3-ю строку $e_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ можно представить в виде линейной комбинации базисных строк следующим образом: $e_3 = e_1 - e_2$.

Рассмотрим определитель. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Поскольку этот определитель равен нулю, то строки этого определителя должны быть линейно зависимы. Действительно, можно составить линейную комбинацию строк, равную нулю: $e_1 - 2e_2 + e_3 = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти ранг матрицы двумя методами:

а) $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) 2; б) 2; в) 3; г) 2.

2. Определить ранг матрицы и найти все ее базисные миноры:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований и указать какой-либо ее базисный минор:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 15 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 29 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) 2; б) 2; в) 3; д) 2; е) 3.

4. Определить ранг матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r(A) = 0$, если $\lambda = 0$; $r(A) = 2$, если $\lambda \neq 0$;
б) $r(A) = 1$, если $\lambda = 1$; $r(A) = 3$, если $\lambda \neq 1$.

5. Показать, что строки матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ линейно зависимы.

6.При каком значении α строки матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы.

7. Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

8*. Пусть r – ранг матрицы размерности $m \times n$. Покажите, что $r \leq \min(m, n)$.
9*. Как может измениться ранг матрицы, если изменятся один элемент этой матрицы?
10*. Доказать, что если произведение матриц $A \cdot B$ определено, то

$$\mathrm{rang}(A\cdot B) \le \min(\mathrm{rang}(A),\ \mathrm{rang}(B)).$$

11*. Пусть A – невырожденная матрица, а матрицы B и C таковы, что $A\cdot B$ и $C\cdot A$ определены. Доказать, что $\mathrm{rang}(A\cdot B) = \mathrm{rang}(B)$ и $\mathrm{rang}(C\cdot A) = \mathrm{rang}(C)$.
12*. Доказать, что если сумма матриц $A+B$ определена, то

$$\mathrm{rang}(A+B) \le \mathrm{rang}(A)+\mathrm{rang}(B).$$

1.3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО ПРАВИЛУ КРАМЕРА, МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ, МЕТОДОМ ГАУССА. ПОЛНАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

1.3.1 Решения систем линейных алгебраических уравнений с помощью правила Крамера и матричным методом

Пусть задана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными общего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Определение 1. Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется ***основной матрицей системы*** (1.3.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если к основной матрице добавить столбец свободных членов, то получится ***расширенная матрица системы***:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Более компактно систему (1.3.1) можно записать в матричном виде следующим образом:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - основная матрица системы (1.3.1), $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица – столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матрица – столбец свободных членов.

Определение 2. ***Решением системы*** линейных алгебраических уравнений (1.3.1) называют значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, при которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Определение 3. Система линейных алгебраических уравнений называется ***однородной***, если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

Определение 4. Решение однородной системы (1.3.2) называется ***тривиальным,*** если $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, и ***нетривиальным***, если хотя бы одно из значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ отлично от нуля.

Определение 5. Система линейных алгебраических уравнений называется ***совместной***, если она имеет решение, и ***несовместной***, если она не имеет решения.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений из n – уравнений с n – неизвестными

Рассмотрим следующие методы решения системы линейных алгебраических уравнений, содержащих n – уравнений с n – неизвестными: правило Крамера, матричный метод.

Метод Крамера. Пусть задана система n – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_{n.} \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Определение 6. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (1.3.3) называется ***главным определителем системы***, обозначается Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ni} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема, которую будем называть правилом Крамера для системы (1.3.3).

Теорема 1 (*правило Крамера для квадратной системы n×n*). Если главный определитель Δ системы (1.3.3) отличен от нуля, то система имеет решение, и притом, единственное. Это решение можно найти по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \dots, \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (1.3.4)$$

где каждый определитель Δ_i получается из определителя Δ путем замены соответствующего i-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Отметим, что:

1. Если главный определитель Δ системы (1.3.3) равен нулю, и хотя бы один из определителей (1.3.4) $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ отличен от нуля, то система решений не имеет (несовместна).
2. Если главный определитель системы (1.3.3) Δ равен нулю, и все определители (1.3.4) $\Delta_1=\Delta_2=\dots=\Delta_i=\dots=\Delta_n= 0$, то система совместна и имеет множество решений.

Матричный метод. Рассмотрим систему n – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными вида (1.3.3). Эту систему можно записать как матричное уравнение

$$A \cdot X=B, \tag{1.3.5}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - основная матрица системы (1.3.3), $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица – столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица – столбец свободных членов.

Если главный определитель системы не равен нулю $\Delta \neq 0$, то матрица A имеет обратную A^{-1}.

Алгоритм решения систем матричным методом

1. Вычисляем главный определитель Δ системы, убеждаемся, что он отличен от нуля.
2. Находим матрицу, обратную основной матрице системы.
3. Находим решение системы по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.3.6).$$

4. Делаем проверку, подставляя полученное решение в исходную систему.

Замечание. Метод Крамера и матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений целесообразнее применять только к системам, в которых число неизвестных совпадает с числом уравнений в случае единственного решения таких систем.

Типовые задания

Пример 1. Решить неоднородную систему с помощью правила Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Вычислим основной определитель системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33 \neq 0,$$

то есть система имеет единственное решение.

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 48 + 7 + 40 - 84 + 2 = 33,\ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 4 + 84 + 40 - 7 - 48 = 33,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Сделав проверку, установим истинность единственного решения $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} \quad\;\; y + 3z = -1, \\ 2x + 3y + 5z = 3, \\ 3x + 5y + 7z = 6. \end{cases}$$

Решение. Находим главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4.$$

Поскольку $\Delta = 4 \neq 0$, то для нахождения решения системы можно применить правило Крамера, но предварительно вычислим еще три определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -4.$$

Тогда по формулам (1.3.4)

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Проверка:

$$\begin{cases} \quad\;\; 1 \cdot 2 + 3(-1) = -1, \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5(-1) = 3, \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7(-1) = 6. \end{cases}$$

Следовательно, единственное решение $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ найдено правильно.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде

$$A\cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу. Поскольку

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -23, \text{ то } A^{-1} = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда находя решение по формуле (1.3.6), имеем

$$X = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 40 \end{pmatrix} = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -115 \\ 92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -4. \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему неоднородных алгебраических уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 3x + 2z = 0, \\ 4x - 2y + 5z = 2. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$A\cdot X = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A ($\det A = -4 \neq 0$), поэтому можно решить матричным методом, так как при этом система размерности 3×3 (3 - уравнения, 3 - неизвестных), то есть квадратная.

Найдем обратную матрицу с помощью присоединенной матрицы. В итоге получаем

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Находим решение системы по формуле (1.3.6)

$$X = A^{-1} \cdot B =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4\cdot 1 & + & (-8)\cdot 0 & + & 4\cdot 2 \\ (-7)\cdot 1 & + & 9\cdot 0 & + & (-5)\cdot 2 \\ (-6)\cdot 1 & + & 10\cdot 0 & + & (-6)\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 12 \\ -17 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{17}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

то есть получили решение $x = -3$, $y = \frac{17}{4}$, $z = \frac{9}{2}$ для данной системы. Чтобы проверить истинность полученного результата, сделаем проверку, подставляя значения *x, y, z* в исходную систему:

$$\begin{cases} -3+2\cdot\frac{17}{4} - \frac{9}{2} = 1; \\ 3\cdot(-3) + 2\cdot\frac{9}{2} = 0, \\ 4\cdot(-3) - 2\cdot\frac{17}{4} + 5\cdot\frac{9}{2} = 2. \end{cases}$$

То есть единственное решение $X = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{17}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ верно.

Задания для самостоятельного решения

1. Записать системы в матричной форме и решить их матричным способом:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_3 = 1; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_4 = 0, \\ x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_4 = -24, \\ x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: а) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$; б) $x_1 = -19$, $x_2 = 26$, $x_3 = 11$, $x_4 = -5$.

2. Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

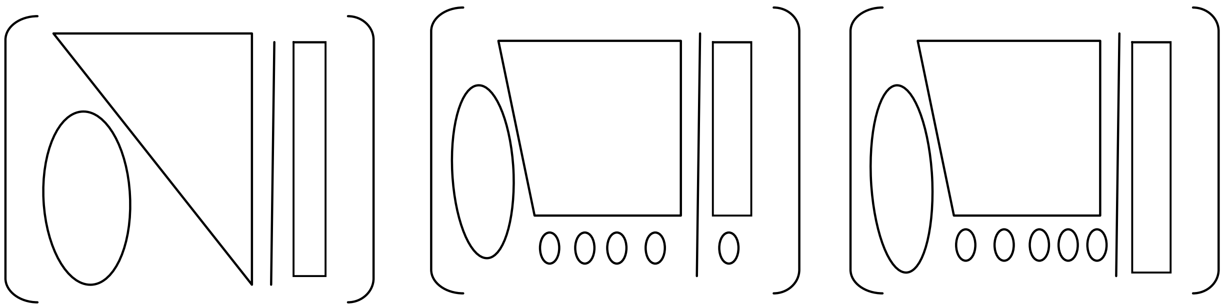
Ответ: а) $x_1 = x_2 = x_3 = -1$; б) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

1.3.2. Общая схема исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений с использованием метода Гаусса

Метод Гаусса. Введем понятие ***элементарных преобразований расширенной матрицы системы*** (1.3.1):

1. перестановка строк (столбцов) матрицы;
2. умножение строки матрицы на действительное число отличное от нуля и сложение с другой строкой;
3. вычеркивание строки матрицы, все элементы которой равны нулю;
4. вычеркивание одной из пропорциональных строк матрицы;
5. умножение строки матрицы на число отличное от нуля.

Чтобы решить систему m – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными методом Гаусса, необходимо записать расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования расширенной матрицы системы, привести ее к трапециевидной форме. В результате этих преобразований матрица примет один их трех видов (рис.1.3.1, *а, б, в*):



а) *б*) *в*)

Рис. 1.3.1, *а* , *б*, *в*

Если матрицу можно свести к виду рис. 1.3.1, *а*, то система совместна и имеет единственное решение. Чтобы найти его, нужно от расширенной матрицы перейти вновь к системе. Из последнего уравнения найти соответствующее неизвестное. Поднимаясь вверх по системе, подставляя найденное неизвестное в предыдущее уравнение, находим следующее неизвестное и так далее.

Если матрицу можно свести к виду рис. 1.3.1, *б*, то система совместна и имеет множество решений.

Если матрицу можно свести к виду рис. 1.3.1, *в*, то система несовместна.

Совместность системы линейных алгебраических уравнений и количество решений системы удобнее определять с помощью теоремы Кронекера – Капелли.

Теорема 2 (*Кронекера – Капелли*). Для того чтобы система (1.3.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, то есть $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\overline{A}) = r$, причем, если $r = n$ – числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если $r < n$, то система имеет множество решений.

Для наглядности суть теоремы удобно свести в табл. 1.3.1.

Для исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений целесообразно использовать следующую ***общую схему***:

1. Записываем расширенную матрицу системы.

2. Находим ранг основной и расширенной матриц системы $r(A)$, $r(\overline{A})$:

а) если ранги матриц различны $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несовместна;

б) если ранги матриц равны $r(A) = r(\overline{A}) = n$, где n – число неизвестных, то система совместна, имеет единственное решение, которое может быть найдено с помощью методов, рассмотренных в п. 1.3.1 и 1.3.2;

в) если ранги матриц равны $r(A) = r(\overline{A}) = r$, но $r < n$, то система совместна, имеет множество решений, которое можно найти методом, описанным далее.

Таблица 1.3.1

	Ранг	Система неоднородная $AX=B$, где m – уравнений, n – неизвестных	Система однородная $AX = 0$, где m – уравнений, n – неизвестных
1.	$\mathrm{rang}(A) \neq \mathrm{rang}(\overline{A})$	Система несовместна	Это невозможно при $b_1=b_2=\ldots= b_n= 0$, то есть однородная система всегда совместна
2.	$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\overline{A})$	Система совместна	Совместна
	а) $r = n$	Решение единственное	Решение только тривиальное ($x_1= x_2= \ldots = x_n= 0$)
	б) $r < n$	Решений множество	Имеются нетривиальные решения (решений множество)

Запишем укороченную систему уравнений, соответствующую последней матрице, полученной из расширенной матрицы системы путем элементарных преобразований:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \ldots + a'_{1r}x_r + a'_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{r1}x_1 + \ldots + a'_{rr}x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r. \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Эта система будет эквивалентна исходной. Не ограничивая общности, будем считать, что базисный минор располагается в первых r строках и столбцах матрицы A, поэтому назовем неизвестные $x_1,\ldots, x_r$, ***базисными***, а $x_{r+1},\ldots, x_n$ ***свободными***, и перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений (1.3.7). Получим систему относительно базисных неизвестных:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \ldots + a'_{1r}x_r = b'_1 - a'_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{r1}x_1 + \ldots + a'_{rr}x_r = b'_r - a'_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n, \end{cases}$$

которая для каждого набора значений свободных неизвестных $x_{r+1}=c_1,\ldots$, $x_n=c_{n-r}$ имеет единственное решение $x_1(c_1,\ldots,c_{n-r}),\ldots, x_r(c_1,\ldots,c_{n-r})$, находимое по методу Гаусса. Соответствующее решение укороченной, а следовательно, и исходной систем имеет вид

$$X(c_1,\dots,c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1,\dots,c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1,\dots,c_{n-r}) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}. \qquad (1.3.8)$$

Определение 7. Функция (1.3.8), выражающая произвольное решение системы в виде вектор - функции от $n - r$ свободных неизвестных, называется ***общим решением системы*** (1.3.1).

Типовые задания

Пример 1. Выяснить, совместна ли система уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 = 4, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы и найдем ранг основной и расширенной матриц.

Имеем

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Не будем представлять столбец свободных членов с другими столбцами матрицы, чтобы сразу определить ранги основной и расширенной матриц. Второй столбец матрицы $\overline{A}$ умножим на 3 и вычтем из первого, а также сложим второй столбец с четвертым. В результате в третьей строке получим все нули, кроме единицы во втором столбце.

Получаем

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь вторую строку прибавим к первой и четвертой, а затем в полученной матрице первый столбец сложим с четвертым. Имеем

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Далее третий столбец последней матрицы вычтем из четвертого, равного ему, и прибавим к первому. Полученный первый столбец, умноженный на 5, вычтем из пятого. Тогда

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & -44 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Получим rang(A)=3, rang($\overline{A}$)=4, откуда rang(A)≠rang($\overline{A}$),то есть исходная система несовместна (не имеет решений).

Пример 2. С помощью метода последовательных исключений Гаусса выяснить вопрос о совместности данной неоднородной системы и, в случае совместности, решить ее (то есть исследовать и решить систему методом Гаусса):

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу $\overline{A}$ и проведем необходимые элементарные преобразования строк (работать со столбцами не желательно, так как имеем дело с системой уравнений).

Переставим местами строки, так, чтобы первой строкой стала строка на первом месте содержащая единицу; далее прибавляем первую строку, умноженную на соответствующее число последовательно к остальным строкам, чтобы получить в первом столбце все нулевые элементы кроме одного; продолжаем процесс по аналогии, прибавляя вторую строку к третьей, четвертой и пятой и т. д.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Привели матрицу к ступенчатому (трапециевидному) виду. Получили, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\overline{A}) = 4$. По теореме Кронекера – Капелли система совместна.

Так как ранг $r = 4$ и количество неизвестных $n = 4$ $(r=n)$, то решение единственно. Находим его методом Гаусса. Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Из нее, двигаясь снизу вверх, последовательно находим:

$$x_4 = -1;\ x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1;\ x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0;$$
$$x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2.$$

Итак, система совместна, ее решение единственно

$$x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$$

Проверкой легко убедиться в правильности найденного решения $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Исследовать и решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение. Выписываем и преобразуем расширенную матрицу системы , осуществляя элементарные преобразования строк матрицы:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1\\ 1 & 5 & 3 & -2 & 5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4\end{array}\right)\sim$$

$$:\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Привели матрицу к ступенчатому (трапециевидному) виду. Получили, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\overline{A}) = 2$. По теореме Кронекера – Капелли система совместна. Так как ранг $r = 2$ и количество неизвестных $n = 4$ $(r < n)$, то решений множество.

В результате преобразований, в последней строке получились одни нули. Это означает, что число уравнений уменьшилось на единицу:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ \quad -2x_2 - x_3 \qquad\quad = -2. \end{cases}$$

Таким образом, после упрощений осталось два уравнения, а неизвестных четыре, т.е. два неизвестных «лишних». Пусть «лишними», или, как говорят, *свободными переменными*, будут x_3 и x_4. Полагая $x_3 = c_1$ и $x_4 = c_2$ получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -c_1 + 2c_2 + 1, \\ \quad -2x_2 = c_1 - 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2c_2 - \dfrac{c_1}{2}, \\ x_2 = 1 - \dfrac{c_1}{2}. \end{cases}$$

Теперь можно записать решение системы $X = \begin{pmatrix} 2c_2 - \dfrac{c_1}{2} \\ 1 - \dfrac{c_1}{2} \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$

Записанное подобным образом решение является общим, поскольку, придавая параметрам c_1 и c_2 различные значения, можно описать все возможные решения системы. Далее можно сделать проверку, подставляя полученное общее решение в исходную систему.

Пример 4. Исследовать систему линейных уравнений и решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Однородная система всегда совместна. Найдем ранг расширенной матрицы системы, не расписывая подробно элементарные преобразования:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0 \end{array}\right) \vdots \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -7 & 25 & -4 & 0 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 & 0 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 & 0 \end{array}\right) \vdots$$

$$\vdots \left(\begin{array}{cc:ccc|c} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -7 & 25 & -4 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили, что $r(A)=r(\overline{A})=2 < n=4$, следовательно, система имеет множество решений. Таким образом, множество решений однородной системы уравнений образует линейное подпространство размерности $n–r=5–2=3$. Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_2, так как за базисный минор возьмем

$$\mathrm{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

В результате элементарных преобразований строк расширенной матрицы системы мы исходную систему привели к ей эквивалентной, имеющей более простой вид: $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0, \\ -8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$ Полагая, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, находим $x_1 = -\frac{19}{8}c_1 - \frac{3}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3$, $x_2 = -\frac{7}{8}c_1 + \frac{25}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3$.

Запишем решение системы $X=\begin{pmatrix} -\frac{19}{8}c_1-\frac{3}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{7}{8}c_1+\frac{25}{8}c_2-\frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Зная основную матрицу A и расширенную A, записать соответствующую им систему линейных алгебраических уравнений и решить вопрос о ее совместности или несовместности, пользуясь теоремой Кронекера-Капелли:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 2 \\ & 3 \end{array}\right);$$

$$\text{б) } A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{c|c} & 6 \\ & 12 \\ A & -6 \\ & 3 \\ & 9 \end{array}\right).$$

Ответ: а) rang(A)=2, rang($\overline{A}$)=3, система несовместна;
б) rang(A)=rang($\overline{A}$)=3, система совместна.

2. Доказать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли, записать системы в матричной форме и решить их методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_2+4x_3=6, \\ x_1+x_3=1; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 2x_1+3x_2+8x_4=0, \\ x_2-4x_3+3x_4=0, \\ x_1+x_4=-24, \\ x_3+2x_4=1. \end{cases}$$

Ответ: а) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=0$; б) $x_1=-19$, $x_2=26$, $x_3=11$, $x_4=-5$.

3. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: а) $x_1=14c$, $x_2=21c$, $x_3=x_4=c$; б) $x_1=-10c+10$, $x_2=c$, $x_3=15-16c$, $x_4=4-5c$ (c – любое число).

4. Исследовать систему уравнения на совместность и, в случае совместности, решить ее:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

Ответ: $x_1= 3$, $x_2= 2$, $x_3= 1$.

5. Решить однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1= 8c_1-7c_2$, $x_2= -6c_1+5c_2$, $x_3 = c_1$, $x_4=c_2$.

6.* Доказать, что если система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases} \text{совместна, то } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

7.* Указать при каких λ данная система уравнений имеет решение или несовместна:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$$

8.* Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы сумма двух решений также была решением.

Ответ: однородность системы.

9.* Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы произведение решений системы линейных уравнений и числа также было её решением.

Ответ: однородность системы.

10. При каком условии некоторая комбинация любых решений данной однородной системы уравнений будет решением этой системы?

Ответ: Сумма коэффициентов линейной комбинации равна 1.

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ. БАЗИС ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА, РАЗЛОЖЕНИЕ ПО БАЗИСУ»

2.1.1. Основные понятия векторной алгебры. Линейные операции над векторами

Определение 1. ***Вектором*** плоскости (пространства) называют направленный отрезок плоскости (пространства). Вектор, заданный упорядоченной парой точек *A, B,* будем обозначать $\overline{AB}$ (рис. 2.1.1). Точка A называется ***началом вектора***, а точка B – ***концом вектора***. Векторы часто обозначают одной буквой $\overline{a}, \overline{b}, \ldots$

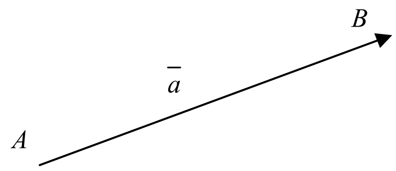


Рис. 2.1.1

Определение 2. ***Длиной вектора*** (его модулем) называют расстояние от начала вектора до его конца и обозначается символом $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\overline{a}\right|$.

Определение 3. Векторы, у которых точка приложения не определена, называются ***свободными***.

Определение 4. Вектор, у которого конец совпадает с началом (вектор-точка) называют ***нулевым вектором*** и обозначают $\overline{0}$. Его длина равна нулю и приписывают ему любое направление.

Определение 5. Два вектора на плоскости, расположенные на одной прямой или параллельных прямых, называются ***коллинеарными.***

Определение 6. Три вектора и более в пространстве, расположенные на одной или на параллельных плоскостях, называются ***компланарными.***

Определение 7. Два вектора называются ***равными***, обозначают $\overline{a} = \overline{b}$, если выполняются условия: длины этих векторов равны; векторы расположены на одной или параллельных прямых (коллинеарны); векторы сонаправлены.

Определение 8. ***Противоположный вектор***, обозначаемый $-\overline{a}$ – это вектор, который имеет модуль, равный модулю вектора $\overline{a}$, коллинеарен с ним, но направлен в противоположную сторону.

Определение 9. Вектор, модуль которого равен единице, называется ***единичным вектором*** или ***ортом.***

Определение 10. ***Осью*** называется всякая прямая, на которой указано направление.

Определение 11. ***Проекцией точки М на ось l*** называется основание M_1 перпендикуляра, опущенного из точки М на данную ось (рис. 2.1.2).

Определение 12. Пусть l – некоторая ось, а $\overline{AB}$ вектор, произвольно расположенные в пространстве. Проектируя начало и конец вектора на ось, получим на ней вектор $\overline{A_1B_1}$ (рис. 2.1.2).

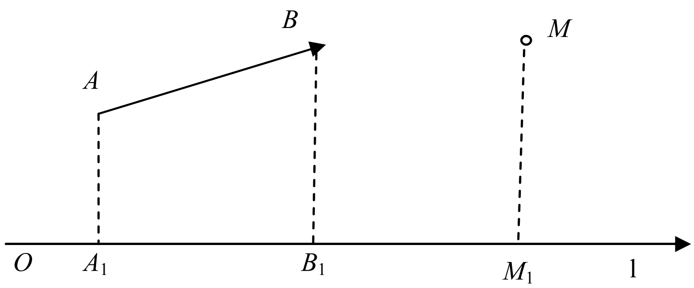


Рис. 2.1.2

Предположим, что A_1 имеет координату x_1, а B_1 – координату x_2. Разность $x_2 - x_1$ между координатами проекций конца и начала вектора $\overline{AB}$ на ось l называется ***проекцией вектора $\overline{AB}$ на эту ось***.

Линейные операции над векторами

К линейным операциям над векторами относят операции сложения и вычитания векторов, умножение вектора на число, представленные табл.2.1.1.

Типовые задания

Пример 1. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить следующие их линейные комбинации: а) $\bar{a}+3\bar{b}$; б) $\frac{1}{2}\bar{a}-2\bar{b}$.

Решение. Зададим геометрически векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ следующим образом (рис. 2.1.3):

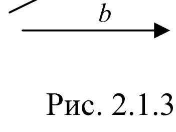


Рис. 2.1.3

Используя правило треугольника найдем вектор $\overline{a}+3\overline{b}$(рис. 2.1.4):

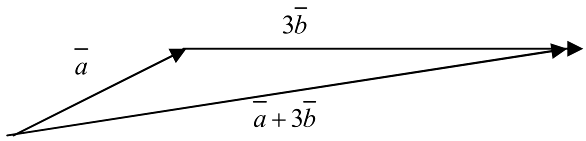


Рис. 2.1.4

Осуществим вычитание двух векторов по правилу представленному в табл. 2.1.1 в пункте 2 (рис.2.1.5) и найдем геометрический образ вектора $\frac{1}{2}\overline{a}-2\overline{b}$: $\frac{1}{2}$

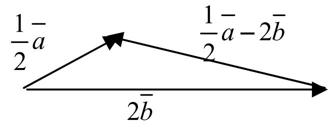


Рис. 2.1.5

Пример 2. Векторы $\overline{AB}=\overline{a}$ и $\overline{AD}=\overline{b}$ служат сторонами параллелограмма. Выразить через $\overline{a},\overline{b}$ векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, совпадающие с его диагоналями.

Решение. Удобнее начинать с построения чертежа (рис. 2.1.6).

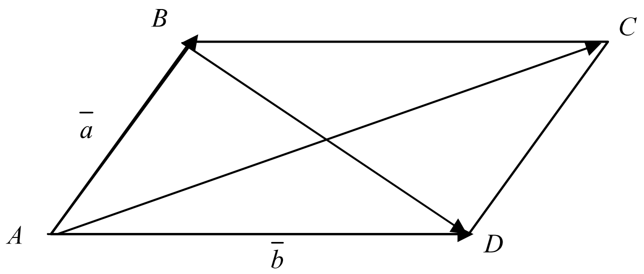


Рис. 2.1.6

Пользуясь правилом параллелограмма сложения векторов имеем, что

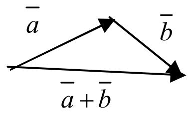
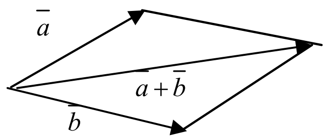
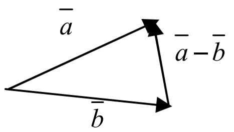
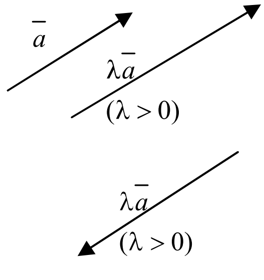
$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{a}+\overline{b}.$$

Вычитая геометрически векторы, имеем, что $\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=\overline{a}-\overline{b}$.

Следовательно, получили следующие выражения для векторов, совпадающих с диагоналями параллелограмма:

$$\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b};$$
$$\overline{BD}=\overline{a}-\overline{b}.$$

Таблица 2.1.1

№	Геометрический образ	Координатная форма записи (если заданы два вектора своими координатами $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\overline{в} = (x_2; y_2; z_2)$)
1.	*Сложение векторов.* а) правило треугольника:  б) правило параллелограмма: 	$\overline{a}+\overline{b} = (x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)$
2.	*Вычитание векторов.* 	$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$
3.	*Умножение вектора на действительное число λ.* 	$\overline{b} = \lambda\overline{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$

Пример 3. Даны векторы $\overline{a}$ = (4; 0; 6) и $\overline{b}$ = (-1; 2; 0). Найти координаты векторов: $3\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$; $\overline{a}+3\overline{b}$.

Решение. 1) $3\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}=3\cdot(4;0;6)-\frac{1}{2}\cdot(-1;2;0)=(12;0;18)-(-\frac{1}{2};1;0)=$

$$=(12+\frac{1}{2};0-1;18-0)=(12,5;-1;18);$$

2) $\overline{a}+3\overline{b}=(4;0;6)+3\cdot(-1;2;0)=(4;0;6)+(-3;6;0)=(4-3;0+6;6+0)=$
$=(1;6;6)$.

Задания для самостоятельного решения

1. По данным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построить следующие их линейные комбинации: а) $2\overline{a}+\overline{b}$; б) $\overline{a}-3\overline{b}$; в) $\frac{1}{3}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}$; г) $-3\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$.

2. Векторы $\overline{AB}=\overline{c}$, $\overline{BC}=\overline{a}$, $\overline{CA}=\overline{b}$ служат сторонами треугольника ABC. Выразить через $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторы $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$ совпадающие с медианами треугольника ABC.

Ответ: $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{a}+\overline{c}$ или $\overline{AM}=\frac{1}{2}(\overline{c}-\overline{b})$, $\overline{BN}=\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}$ или

$$\overline{BN}=\frac{1}{2}(\overline{a}-\overline{c}),\ \overline{CP}=\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c} \text{ или } \overline{CP}=\frac{1}{2}(\overline{b}-\overline{a}).$$

3. Даны векторы $\overline{a}=(3;-2;6)$ и $\overline{b}=(-2;1;0)$. Найти координаты векторов: $2\overline{a}-\frac{1}{3}\overline{b}$; $\frac{1}{3}\overline{a}-\overline{b}$; $2\overline{a}+3\overline{b}$.

Ответ: (20/3; -13/3; 12), (3; -5/3; 2), (0; -1; 12).

2.1.2. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис векторного пространства. Разложение вектора по базису

Определение 13. Система векторов $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ называется ***линейно зависимой***, если существуют числа α_1, α_2, ..., α_n, не все равные нулю, для которых имеет место равенство

$$\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+...+\alpha_n\overline{a_n}=\overline{0}. \qquad (2.1.1)$$

Определение 14. Система векторов $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ называется ***линейно независимой***, если равенство (2.1.1) имеет место только при $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$.

Определение 15. Выражение $k_2 \cdot \overline{a_2} + k_3 \cdot \overline{a_3} + ... + k_n \cdot \overline{a_n}$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a_2}, \overline{a_3}, ..., \overline{a_n}$ с коэффициентами $k_2, k_3, ..., k_n$.

Замечание: 1) если система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ линейно зависима, то хотя бы один из этих векторов всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных; 2) если хотя бы один из векторов системы представлен в виде линейной комбинации других векторов, то эта система векторов линейно зависима.

Теорема 1. Пусть $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ – два неколлинеарных вектора в R^2. Тогда всякий вектор $\overline{x}$ в R^2 есть их линейная комбинация, причем коэффициенты разложения $\overline{x}$ по $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ определяются единственным образом.

Теорема 2. Пусть $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ и $\overline{e_3}$ – три любых некомпланарных вектора в R^3. Тогда любой вектор $\overline{x}$ в R^3единственным образом раскладывается в их линейную комбинацию.

Замечание: 1) Линейно-независимые векторы образуют базис для какого-либо множества векторов, если любой вектор из этого множества может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации этих векторов. 2) любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, а любые три некомпланарных вектора – базис в пространстве.

Определение 16. ***Базисом на плоскости*** называются два неколлинеарных вектора этой плоскости, взятые в определенном порядке.

Определение 17. Тройка некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке, называется ***базисом в пространстве.***

Если на плоскости или в пространстве выбран некоторый базис $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ $\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)$, то каждый вектор $\overline{x}$ плоскости (пространства) может быть записан однозначно в виде: $\overline{x} = x_1 \cdot \overline{e_1} + x_2 \cdot \overline{e_2}$ $\left(\overline{x} = x_1 \cdot \overline{e_1} + x_2 \cdot \overline{e_2} + x_3 \cdot \overline{e_3}\right)$, то есть разложен по базису. Числа (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3) называются ***координатами вектора*** $\overline{x}$ в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ $\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)$. Запись $\overline{x} = x_1 \cdot \overline{e_1} + x_2 \cdot \overline{e_2} + x_3 \cdot \overline{e_3}$ и $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)$ означает, что вектор $\overline{x}$ имеет координаты x_1, x_2, x_3.

Признак коллинеарности векторов. Два вектора $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда пропорциональны их соответствующие координаты:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \qquad (2.1.2)$$

Определение 18. ***Ортонормированный базис*** – это базис, состоящий из единичных (нормированных) и взаимно перпендикулярных (ортогональных) векторов. В этом случае базисные вектора имеют особые обозначения: $\overline{e_1} = \overline{i}$, $\overline{e_2} = \overline{j}$, $\overline{e_3} = \overline{k}$.

Определение 19. ***Общей декартовой системой координат*** называется совокупность точки O и базиса. Если базис – ортонормированный, то декартова система называется ***прямоугольной***. Точка, в этом случае называется ***началом координат*** и обозначается буквой O. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются ***осями координат.*** В случае прямоугольной системы координат координатные оси называются, соответственно, ***абсциссой***, ***ординатой*** и ***аппликатой***.

Определение 20. ***Радиус-вектором*** точки M в заданной системе координат называется вектор $\overline{OM}$. ***Координатами точки*** M называются координаты ее радиус-вектора и обозначают $M(x; y; z)$.

Координаты вектора в декартовой прямоугольной системе координат обычно обозначаются буквами x, y, z:

$$\overline{a} = (x; y; z) \equiv x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} \ (\text{в } R^3) \text{ и } \overline{a} = (x; y) \equiv x\overline{i} + y\overline{j} \ (\text{в } R^2).$$

Из школьного курса математики известна формула вычисления координат вектора $\overline{AB}$ в декартовой прямоугольной системе координат, при условии, что заданы координаты концов вектора $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \tag{2.1.3}$$

Длина вектора в декартовой прямоугольной системе координат равна

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.1.4}$$

Вектор однозначно можно определить не только заданием его координат, но и заданием длины вектора и его направления. Направление вектора в ортонормированном базисе (в декартовой прямоугольной системе координат) задается при помощи ***направляющих косинусов***:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|}, \ \cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|}, \ \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|}, \tag{2.1.5}$$

где α, β, γ – углы между вектором $\overline{a}$ и базисными векторами $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ соответственно. Очевидно, что направляющие косинусы совпадают с координатами орта вектора: $\overline{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. При этом

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.1.6}$$

Типовые задания

Пример 1. Дан вектор $\overline{a}$=(2;-1;-2). Найти его длину и единичный вектор $\overline{a_0}$ направления вектора $\overline{a}$.

Решение. По формуле (2.1.4) находим длину вектора

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3,$$

а по формулам (2.1.5) – его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3},\ \cos\beta = -\frac{1}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{3},\ \overline{a_0} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

Пример 2. Даны две точки *A*(3; -4; 7), *B*(5; -6; 8). Найти координаты вектора $\overline{AB}$ и координаты точки *E* – середины отрезка *AB*.

Решение. Используя формулу (2.1.3) для вектора $\overline{AB}$ получаем

$$x = 5 - 3 = 2,\ y = -6 - (-4) = -2,\ z = 8 - 7 = 1 \Rightarrow \overline{AB} = (2; -2; 1).$$

Координаты середины вектора $\overline{AB}$ находим как среднее арифметическое координат концов отрезка:

$$x = \frac{5+3}{2} = 4,\ y = \frac{-6+(-4)}{2} = -5,\ z = \frac{8+7}{2} = 7{,}5,$$

то есть $E(4; -5; 7{,}5)$.

Пример 3. Даны четыре точки $A(5; 6; -8)$, $B(8; 10; -3)$, $C(1; -2; 4)$, $D(7; 6; 14)$. Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

Решение. Так как координаты вектора

$$\overline{AB} = (8-5;\ 10-6;\ -3-(-8)) = (3;\ 4;\ 5),\ \overline{CD} = (7-1;\ 6-(-2);\ 14-4) = (6;\ 8;\ 10)$$

и $\overline{CD}$=2$\overline{AB}$, то есть выполняется признак коллинеарности векторов:

$$\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}=2.$$

Следовательно, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны.

Пример 4. Векторы $\overline{a}$=(8; 2; 3), $\overline{b}$=(4;6;10), $\overline{c}$=(3;-2;1) образуют базис векторного пространства. Найти координаты вектора $\overline{d}$=(12; -9; 11) в этом базисе.

Решение. Так как векторы $\overline{a}$=(8; 2; 3), $\overline{b}$=(4;6;10), $\overline{c}$=(3;-2;1) образуют базис трехмерного пространства, то вектор $\overline{d}$ можно разложить по этому базису в виде $\overline{d}=x_1\overline{a}+x_2\overline{b}+x_3\overline{c}$. Это равенство равносильно следующим равенствам:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=12, \\ x_1-x_2-2x_3=-9, \\ -x_1+3x_2+x_3=11, \end{cases}$$

так как равные векторы имеют равные координаты. Решив полученную систему уравнений по правилу Крамера или методом Гаусса или матричным методом, найдем $x_1=2, x_2=3, x_3=4$. Итак, $\overline{d}=2\overline{a}+3\overline{b}+4\overline{c}$, вектор $\overline{d}$ в данном базисе имеет координаты $x_1=2, x_2=3, x_3=4$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}$=(3; -5; 8) и $\overline{b}$=(-1; 1; -4).

Ответ: $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=6$, $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|=14$.

2. Векторы $\overline{AB}$ = (2; 6; -4) и $\overline{AC}$ = (4; 2; -2) определяют стороны треугольника *ABC*. Найти длину вектора $\overline{CD}$, совпадающего с медианой, проведённой из вершины *C*.

Ответ: $\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{10}$.

3. Вектор $\overline{a}$, заданный в трехмерном пространстве составляет с координатными осями *Ox* и *Oy* углы $\alpha=60^\circ$, $\beta=120^\circ$. Вычислить его координаты если $|\overline{a}|=2$.

Ответ: $\overline{a}$ = (1; -1; 2) или $\overline{a}$ = (1; -1; -2).

4. В некотором базисе векторы заданы координатами $\overline{a}$ =(1; 1; 2), $\overline{e_1}$ =(2; 2; -1), $\overline{e_2}$ =(0; 4; 8), $\overline{e_3}$ =(-1; -1; 3).Убедиться что векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ образуют базис, и найти в нем координаты вектора $\overline{a}$

Ответ: $\overline{a}$ =(1; 0; 1).

2.2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ «СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ, УСЛОВИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ВЕКТОРОВ. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ, УСЛОВИЯ КОЛЛИНЕАРНОСТИ И КОМПЛАНАРНОСТИ ВЕКТОРОВ»

2.2.1 Скалярное произведение векторов. Условие ортогональности двух векторов

Определение 1. ***Скалярным произведением векторов*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла φ между ними (рис. 2.2.1):

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (2.2.1)$$

Обозначается скалярное произведение двух векторов $\overline{a}\cdot\overline{b}$ или $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$.

***Свойства скалярного произведения*:**

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ (переместительное);
2. $\lambda\cdot\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=(\lambda\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\lambda\cdot\overline{b})$ (сочетательное);
3. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$ (распределительное);.
4. $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|^2$.

Для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных своими координатами целесообразно использовать формулу:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2. \qquad (2.2.2)$$

Из определения скалярного произведения вытекает ***условие перпендикулярности*** (***ортогональности***) ***векторов:***

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0\,. \tag{2.2.3}$$

Геометрический смысл скалярного произведения. Рассмотрим проекцию вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$. Для этого поместим их в одно начало O (рис.2.2.1).

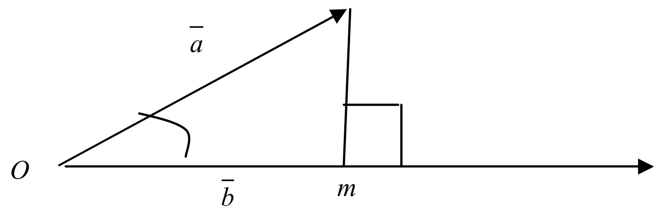


Рис. 2.2.1

Геометрический смысл скалярного произведения ***связан с нахождением проекции вектора на вектор*** (рис. 2.2.1)

$$m = \text{Пр}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}\,. \tag{2.2.4}$$

А формула вычисления косинуса угла между векторами записывается

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}\,. \tag{2.2.5}$$

Механический смысл скалярного произведения заключается в том, что скалярное произведение силы $\overline{F}$, приложенной к материальной точке, на перемещение $\overline{S}$ этой точки равна работе, совершенной этой силой:

$$W = A = \overline{F} \cdot \overline{S}\,. \tag{2.2.6}$$

Типовые задания

Пример 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\left|\overline{a}\right| = 4$, $\left|\overline{в}\right| = 5$, а $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$.

Решение.

Используя формулу (2.2.1) из определения скалярного произведения, получим $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi=4\cdot5\cdot\cos\frac{3\pi}{4}=20\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-10\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти скалярное произведение двух векторов $\left(\overline{a}-4\overline{b}\right)$ и $\left(\overline{a}+6\overline{b}\right)$, если $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$ и угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Решение. Используя формулу из определения скалярного произведения векторов и свойства скалярного произведения, получаем

$$\left(\overline{a}-4\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}+6\overline{b}\right)=\overline{a}\cdot\overline{a}+\overline{a}\cdot6\overline{b}-4\overline{b}\cdot\overline{a}-4\overline{b}\cdot6\overline{b}=$$

$$|a|^2+6\overline{a}\cdot\overline{b}-4\overline{b}\cdot\overline{a}-24|\overline{b}|^2=|a|^2+6\overline{a}\cdot\overline{b}-4\overline{a}\cdot\overline{b}-24|\overline{b}|^2=$$

$$=|\overline{a}|^2+2\overline{a}\cdot\overline{b}-24|\overline{b}|^2=3^2+2\cdot3\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{2}-24\cdot4^2=$$

$$=9+0-384=-375.$$

Пример 3. Даны векторы $\overline{a}=(-2;7;1)$, $\overline{b}=(4;\ -1;8)$. Найти $\overline{5a}\cdot\overline{4b}$.

Решение. Вычислим скалярное произведение через координаты по формуле (2.2.2) и используя свойство 2 скалярного произведения:

$$\overline{5a}\cdot\overline{4b}=20\overline{a}\cdot\overline{b}=20((-2)\cdot4+7\cdot(-1)+1\cdot8)=20\cdot(-8-7+8)=20\cdot(-7)=-140.$$

Пример 4. Даны два вектора $\overline{a}$=(8; -7; -2), $\overline{b}$=(7;-11;8). Найти угол между ними.

Решение. По формуле (2.2.5) $\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$ получаем

$$\cos\varphi=\frac{8\cdot7+(-7)(-11)+(-2)\cdot8}{\sqrt{8^2+(-7)^2+(-2)^2}\sqrt{7^2+(-11)^2+8^2}}=\frac{117}{117\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=45^\circ.$$

Пример 5. Доказать, что векторы $\overline{a}$=(2; -4; 6), $\overline{b}$ = (3; 3; 1) ортогональны.

Решение. Проверяем условие ортогональности векторов (2.2.3) и находим $\overline{a}\cdot\overline{b}$=$2\cdot3+(-4)\cdot3+6\cdot1=0$. Так как данное условие выполнено, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

Пример 6. Вычислить работу равнодействующей $\overline{F}$ сил $\overline{F}_1$=(3; -4; 5), $\overline{F}_2$=(2; 1; -4), $\overline{F}_3$=(-1; 6; 2), приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки M_1(4; 2; -3) в точку M_2(7; 4; 1).

Решение. Так как $\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3$=(4; 3; 3), $\overline{M_1M_2}=\overline{s}=(3;2;4)$, то по формуле (2.2.6) имеем $A=\overline{F}\cdot\overline{s}=4\cdot 3+3\cdot 2+3\cdot 4=30$ Дж.

Задания для самостоятельного решения

1.Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$, и $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$. Вычислить:

$\overline{a}\cdot\overline{a}$; $\overline{b}\cdot\overline{b}$; $(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}+\overline{b})$; $(\overline{a}-\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b})$; $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{a}+2\overline{b})$.

Ответ: 9, 16, 13, 37,-61.

2. Даны векторы $\overline{a}$=(4; -2: -4) и $\overline{b}$=(6; -3; 2). Вычислить: $\overline{a}\cdot\overline{a}$; $\overline{b}\cdot\overline{b}$; $(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}+\overline{b})$; $(\overline{a}-\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b})$; $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{a}+2\overline{b})$.

Ответ: 22, 36, 49, 129, 41, -2, 1.

3. Даны вершины треугольника ABC: A(-4; -2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1). Вычислить внешний угол при вершине B.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4}$.

4. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, длины оснований AD и BC которой соответственно равны 4 и 2, а внутренний угол при вершинеD равен 45°. Найти проекции векторов $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ на ось l, определяемую вектором $\overline{CD}$.

Ответ: 22; -2; 2; 0.

5. Даны вершины четырёхугольника: A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1), D(-5;-5;3). Вычислить угол φ между его диагоналями.

Ответ: $\varphi=90^{\circ}$.

6. При каком значении α векторы $\overline{a}=\alpha\,\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-\alpha\,\overline{k}$ взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\alpha=-6$.

7. Найти координаты вектора $\overline{b}$ коллинеарного вектору $\overline{a}$= (2; 1; -1), при условии $\overline{a}\cdot\overline{b}=3$.

Ответ: $\overline{b}=(1;\ \dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2})$.

8. Под действием силы $\overline{F}$=(5; 4; 3) тело переместилось из начала вектора $\overline{s}$=(2; 1; -2) в его конец. Вычислить работу A силы $\overline{F}$ и угол φ между направлениями силы и перемещения.

Ответ: A = 8 Дж, $\cos\varphi \approx 0{,}38$, $\varphi \approx 1{,}18$ рад или $\varphi \approx 67^{\circ}40'$.

9. Определить работу силы $\overline{F}$, $\left|\overline{F}\right|$=15 Н, которая действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к направлению действия силы.

Ответ: 30Дж.

2.2.2. Векторное произведение векторов. Условие коллинеарности двух векторов

Определение 2. Три вектора называются ***упорядоченной тройкой***, если указано, какой из этих векторов является первым, какой – вторым, какой – третьим.

Определение 3. Тройка векторов называется ***правой***, если эти вектора, приведенные к одному началу, располагаются также как расставленные пальцы правой руки: большой палец – по первому вектору, указательный – по второму, средний – по третьему.

Определение 4. ***Векторным произведением*** вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий условиям:

1. $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi$; (2.2.7)
2. $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;
3. упорядоченная тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - правая (рис.2.2.2).

Обозначается векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ или $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$.

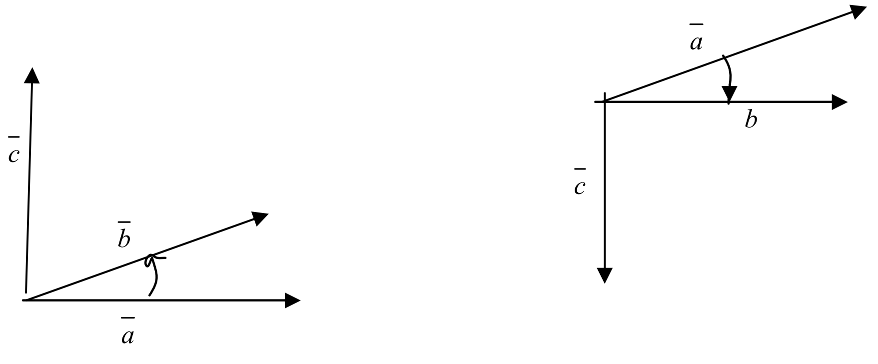


Рис. 2.2.2

***Свойства векторного произведения*:**

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$ (антикоммутативность);
2. $\lambda\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=\left(\lambda\cdot\overline{a}\right)\times\overline{b}=\overline{a}\times\left(\lambda\cdot\overline{b}\right)$;
3. $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$;
4. $\overline{a}\times\overline{a}=0$.

***Геометрический смысл векторного произведения*:**

Модуль векторного произведения численно равен ***площади параллелограмма***, построенного на перемножаемых векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах:

$$\left|\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\varphi=S_{\text{парал-ма}} \qquad (2.2.8)$$

Замечание. $$\frac{1}{2}\left|\overline{c}\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\varphi=S_{\text{треуг-ка}} \qquad (2.2.9)$$

Если два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определены своими координатами в ортонормированном базисе: $\overline{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\overline{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то векторное произведение вычисляется по формуле:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \qquad (2.2.10)$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения:

$$\overline{a}\,||\,\overline{b}\Leftrightarrow\ \overline{a}\times\overline{b}=0. \qquad (2.2.11)$$

Механический смысл векторного произведения

Если $\overline{F}$ – сила, приложенная к точке M, то момент $m_A(\overline{F})$ этой силы относительно точки A равен векторному произведению векторов $\overline{AM}$ и $\overline{F}$, т.е.

$$m_A(\overline{F})=\overline{AM}\times\overline{F}\,. \qquad (2.2.12)$$

Типовые задания

***Пример* 1**. Вычислить значение выражения $|(3\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}\ -\ 4\overline{b})|$, если $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=2$ и $\varphi=\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}=\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Раскроем скобки, учитывая свойства векторного произведения векторов:

$$(3\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}\ -4\overline{b})=3\overline{a}\times\overline{a}+\overline{b}\times\overline{a}\ -12\overline{a}\times\overline{b}\ -4\overline{b}\times\overline{b}=$$
$$=0-\ \overline{a}\times\overline{b}\ -12\overline{a}\times\overline{b}+0=-\ 15\ \overline{a}\times\overline{b}.$$

Далее используя формулу (2.2.7) из определения векторного произведения следует:

$$|(2\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}+2\overline{b})\ |=|-\ 15\overline{a}\times\overline{b}|=15|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi\ =15\cdot5\cdot2\cdot\sin\,30^{\circ}=75.$$

Пример 2. Даны два вектора $\overline{a}$=(5; 3; -4), $\overline{b}$=(6; 7; -8). Найти координаты векторного произведения $\left[a,b\right]$ и выяснить, являются ли эти векторы коллинеарными.

Решение

По формуле (2.2.10) $\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ получаем

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left[\overline{a},\overline{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 5 & 3 & -4\\ 6 & 7 & -8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 7 & -8\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}5 & -4\\ 6 & -8\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}5 & 3\\ 6 & 7\end{vmatrix}\bar{k}=4\bar{i}+16\bar{j}+17\bar{k}\,.$$

Так как $\left[\overline{a},\overline{b}\right]=(4;\ 16;\ 17)\neq\overline{0}\Rightarrow$векторы не являются коллинеарными по условию (2.2.11)

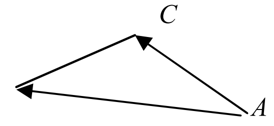


Рис. 2.2.3

Пример 3. Вершины треугольника находятся в точках A(1; 1; 3), B(3;1;6), C(5;1;-3) (рис. 2.2.3). Вычислить его площадь.

Решение.

С помощью формулы $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ находим координаты векторов $\overline{AB}$ и по аналогии $\overline{AC}$: $\overline{AB}$ =(2; 0; 3), $\overline{AC}$ = (4; 0; -6). Так как

$$[AB, AC] = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right\} = (0; 24; 0),$$

То, используя формулу (2.2.9): $\frac{1}{2}|\overline{c}| = \frac{1}{2}|\overline{a} \times \overline{b}| = \frac{1}{2}|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi = S_{\text{треуг-ка}}$, получаем

$$S = \frac{1}{2}\left|[AB, AC]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 24^2 + 0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24^2} = \frac{1}{2}24 = 12.$$

Пример 4. Вычислить координаты вращающего момента *M* силы $\overline{F}$=(3; 2; 1), приложенной к точке *A*(-1; 2; 4) относительно начала координат *O*.

Решение. Проводя расчеты по формуле (2.2.12), имеем

$$m_O(\overline{F}) = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-6;\ 13;\ -8).$$

Задания для самостоятельного решения

1. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны $|\overline{a}|$ = 3, $|\overline{b}|$ = 4. Вычислить $|\overline{a} \times \overline{b}|$; $|(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b})|$; $|(3\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} - 2\overline{b})|$.

Ответ: 12; 24; 60.

2. Даны векторы $\overline{a}$=(3; -1; -2), $\overline{b}$=(1; 2; -1). Найти координаты векторов: $\overline{a} \times \overline{b}$; $(2\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{b}$; $(2\overline{a} - \overline{b}) \times (2\overline{a} + \overline{b})$.

Ответ: (5; 1; 7); (10; 2; 14); (20; 4; 28).

3. Вычислить площадь треугольника *ABC*, если известно, что: *A*(1; 2; 0), *B*(3;0;3), *C*(5; 2; 6).

Ответ: $2\sqrt{13}$.

4. Сила $\overline{F}$ = (2; 2; 9) приложена к точке *A*(4; 2; -3). Вычислить величину и направляющие косинусы момента $\overline{M}$ этой силы относительно точки *B*(2; 4; 0).

Ответ: $|\overline{M}|$=28, cos α=3/7, cosβ=6/7, cosγ= - 2/7.

2.2.3. Смешанное произведение векторов. Условие компланарности векторов

Определение 5. Если два вектора умножаются векторно и затем полученный вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ умножается скалярно на третий вектор $\overline{c}$, то такое произведение называется векторно-скалярным, или ***смешанным произведением*** трех векторов, которое представляет собой число.

Обозначают смешанное произведение следующим образом: $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$.

***Свойства смешанного произведения векторов*:**

1. $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=-(\overline{a}\times\overline{c})\cdot\overline{b}=-(\overline{c}\times\overline{b})\cdot\overline{a}=(\overline{c}\times\overline{a})\cdot b=(\overline{b}\times\overline{c})\cdot\overline{a}$;

2. если два из трех данных векторов равны или коллинеарны, то их смешанное произведение равно нулю;

3. $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$, т.к. «точку» и «крест» можно менять местами, то и пишем $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$;

4. $\overline{a}\cdot(\lambda\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot(\lambda\overline{c})=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})$;

4. если три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ определены своими координатами в ортонормированном базисе: $\overline{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $\overline{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, $\overline{c}=(x_3;\,y_3;\,z_3)$, то смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \qquad (2.2.13)$$

Геометрический смысл смешанного произведения векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ заключается в том, что модуль смешанного произведения $|\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}|$ равен площади параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 2.2.4), то есть $\left|\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\right|=V_{\text{парал-да}}$.

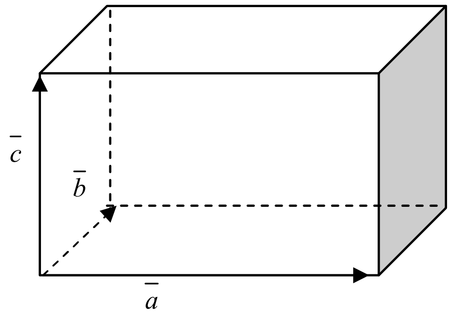


Рис. 2.2.4

Замечание: $\dfrac{1}{6}\left|\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\right|=V_{пирам-ды}$. (2.2.14)

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов. Для того, чтобы три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю, т.е.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = 0. \qquad (2.2.15)$$

Замечание. При проведении практических занятий для наглядности представления и систематизации учебного материала по теме удобно пользоваться таблицей «Нелинейные операции над векторами» (табл. 2.2.1).

Типовые задания

Пример 1. Даны векторы $\bar{a}$ = (1; 3; 1), $\bar{b}$ = (-2; 4; -1), $\bar{c}$ = (2; 4; -6). Требуется установить какую тройку (правую или левую) они образуют, и вычислить $3\bar{a}\cdot 2\bar{b}\cdot\bar{c}$.

Решение. Вычислим смешанное произведение по формуле (2.2.13)

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -78.$$

Так как смешанное произведение имеет отрицательный знак, то векторы образуют левую тройку.

Найдем смешанное произведение $3\bar{a}\cdot 2\bar{b}\cdot\bar{c}$, учитывая, что $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$=78 и свойство 4 смешанного произведения:

$$3\bar{a}\cdot 2\bar{b}\cdot\bar{c} = 6\,\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = 6\cdot 78 = 468.$$

Пример 2. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$=(1; 3; 1), $\bar{b}$=(2; 1; 3), $\bar{c}$=(3; 1; 2) (рис. 2.2.4).

Решение. По формуле (2.2.14) получаем

$$V = \left|\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -8 & -1 \end{vmatrix}\right| = |5+8| = 13.$$

Пример 3. Доказать, что векторы $\bar{a}$=(1; -2; 3), $\bar{b}$ = (4; -5; 6), $\bar{c}$ = (5;-7; 9) компланарны.

Решение. Так как

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -5 & 6\\ 5 & -7 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 3 & -6\end{vmatrix}=0,$$

т.е. выполнено необходимое и достаточное условие (2.2.15) компланарности векторов, следовательно, данные векторы компланарны.

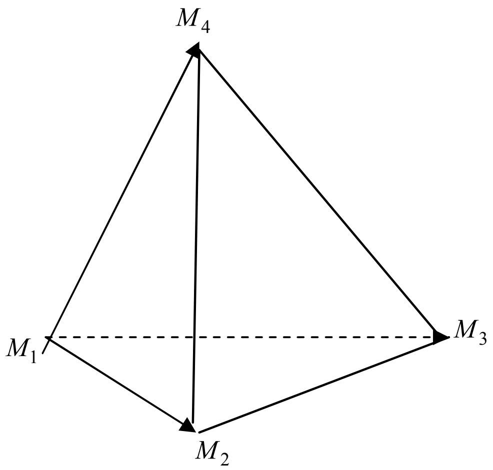


Рис. 2.2.5

Пример 4. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $M_1(6;\ 1;\ 4)$, $M_2(1;\ -3;\ 7)$, $M_3(7;\ 1;\ 3)$, $M_4(2;\ -2;\ -5)$ (рис. 2.2.5).

Решение. В соответствии с формулой (2.2.14) находим

$$V_{\text{пирам-ды}}=\frac{1}{6}\left|\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_4}\cdot\overline{M_1M_3}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}1-6 & -3-1 & 7-4\\ 2-6 & -2-1 & -5-4\\ 7-6 & 1-1 & 3-4\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-5 & -4 & 3\\ -4 & -3 & -9\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\frac{23}{3}.$$

Пример 5. Образуют ли базис векторы

$\bar{a}$=(8; 2; 3), $\bar{b}$=(4; 6; 10), $\bar{c}$=(3;-2; 1)?

Решение. Так как

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}8 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 10\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=9\neq 0,$$

то векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – линейно независимы (некомпланарны) и образуют базис.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны вершины пирамиды $A(2; 0; 4)$, $B(0; 3; 7)$, $C(0; 0; 6)$, $S(4; 3; 5)$. Вычислить ее объем V и высоту H, опущенную на грань ACS

Ответ: $V=2$, $H=2/\sqrt{3}$.

2. Лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(4, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости?

Ответ: лежат.

3. Компланарны ли следующие векторы: $\overline{a}=(2; 3; 1)$, $\overline{b}=(1; -1; 3)$, $\overline{c}=(-1,9,11)$.

Ответ: компланарны.

Таблица 2.2.1

Нелинейные операции над векторами	***Скалярное произведение векторов***	***Векторное произведение векторов***	***Смешанное произведение векторов***
1. определение	$\bar{a}\cdot\bar{b}=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cdot\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right)$	$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}:$ 1) $\lvert\bar{c}\rvert=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\sin\left(\bar{a},\bar{b}\right)$ 2) $\bar{c}\perp\bar{a},\ \bar{c}\perp\bar{b}$ 3) $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ - образуют правую тройку	$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}=\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]=\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]\cdot\bar{c}$
2. свойства	1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$; 2) $\bar{a}^2=\lvert\bar{a}\rvert^2$; 3) $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\ \bar{c}+\bar{b}\ \bar{c}$; 4) $\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)=\lambda\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\lambda\bar{b}$	1) $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$; 2). $\bar{a}\times\bar{a}=0$ 3) $\lambda\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\lambda\bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times\lambda\bar{b}$ 4) $\bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$	$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a}=\bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}$ $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=-\bar{b}\ \bar{a}\,\bar{c}=$ $=-\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}=-\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}$
Координатная запись векторов	Пусть векторы $\bar{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\bar{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, $\bar{c}=\left(x_3,y_3,z_3\right)$ заданы в декартовой прямоугольной системе координат		
3. операции в координатной форме	$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\bar{i}-$ $-\left(x_1z_2-x_2z_1\right)\bar{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\bar{k}$	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
4. необходимые и достаточные условия перпендикулярности, параллельности, компланарности	Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов: $\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$	Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов: $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0;\ \left(\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}\right)$	Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов: $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ - компланарны $\Leftrightarrow$ $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0$
5. геометрический смысл	$\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ $\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{b}\rvert}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$	$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$, $\lvert\bar{c}\rvert=\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert=S_{параллелограмма}$ $\dfrac{1}{2}\lvert\bar{c}\rvert=\dfrac{1}{2}\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert=S_{треугольника}$	$V_{\text{парал-да}}=\lvert\overline{abc}\rvert=\left\lVert\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\rVert$ $V_{пирамиды}=\dfrac{1}{6}\lvert\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\rvert$
6. физический (механический) смысл	Скалярное произведение силы $\bar{F}$ на вектор $\bar{S}$ равно работе $A=W$ этой силы при перемещении материальной точки по вектору $\bar{S}$, т.е. $A=W=\bar{F}\cdot\bar{S}$	$m_A\bar{F}=\overline{AM}\times\bar{F}$ – момент силы, приложенной к точке М относительно точки А	–

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ « ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ, ЕЕ УРАВНЕНИЯ. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ЗАДАЧИ НА ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ»

3.1.1. Плоскость в пространстве и ее уравнение. Взаимное расположение плоскостей

Плоскость и ее свойства изучались в курсе элементарной математики. Наша задача научиться описывать плоскость аналитически, но для этого надо знать уравнение, описывающее плоскость. Поэтому сформулируем основную теорему для плоскости.

Теорема 1. В декартовой системе координат любая плоскость задается линейным уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.1.1}$$

И, наоборот, любое линейное уравнение в декартовой системе координат определяет плоскость.

Уравнение (3.1.1) называется ***общим уравнением плоскости***

Уравнение (3.1.1) можно записать в следующем виде:

$$A(x–x_0) + B(y–y_0) + C(z–z_0) = 0 \, . \tag{3.1.2}$$

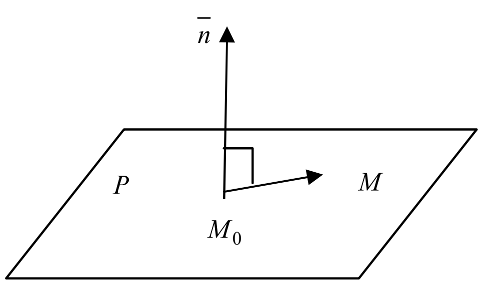


Рис. 3.1.1

Уравнение (3.1.2) называется ***уравнением плоскости*** P, ***проходящей через точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{n}=(A; B; C)$, который называется ***нормальным вектором плоскости*** (рис. 3.1.1).

Определение 1. Общее уравнение плоскости называется ***полным***, если все его коэффициенты не равны нулю, в противном случае оно называется ***неполным*****.** Рассмотрим различные виды неполных уравнений:

1. $D = 0 \Rightarrow O \in P$;
2. $A = 0 \Rightarrow P \parallel Ox$; $B = 0 \Rightarrow P \parallel Oy$; $C = 0 \Rightarrow P \parallel Oz$;
3. $A = B = 0 \Rightarrow P \perp Oz$; $A = C = 0 \Rightarrow P \perp Oy$; $B = C = 0 \Rightarrow P \perp Ox$;
4. $D = A = 0 \Rightarrow Ox \subset P$; $D = B = 0 \Rightarrow Oy \subset P$; $D = C = 0 \Rightarrow Oz \subset P$;
5. $D = A = B \Rightarrow P \equiv xOy$; $D = A = C \Rightarrow P \equiv xOz$; $D = B = C \Rightarrow P \equiv yOz$.

Замечание. Одна и та же плоскость может быть описана различными уравнениями первого порядка в пространстве R^3. Выбор того или иного уравнения определяется информацией, которая известна о плоскости. Например, могут быть известны координаты трех точек плоскости или отрезки, которые отсекает плоскость от осей координат и т. п.

Другие виды уравнений плоскости**:**

1. ***Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки*** $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ (рис. 3.1.2):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.1.3)$$

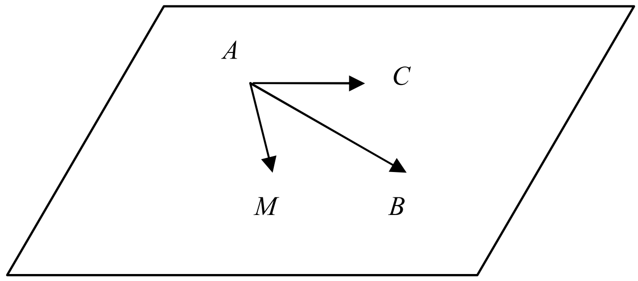


Рис. 3.1.2

2. Для построения более удобно использовать ***уравнение плоскости в отрезках на осях координат*:**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (3.1.4)$$

где a, b, c – отрезки, отсекаемые соответственно на осях Ox, Oy, Oz (рис.3.1.3)

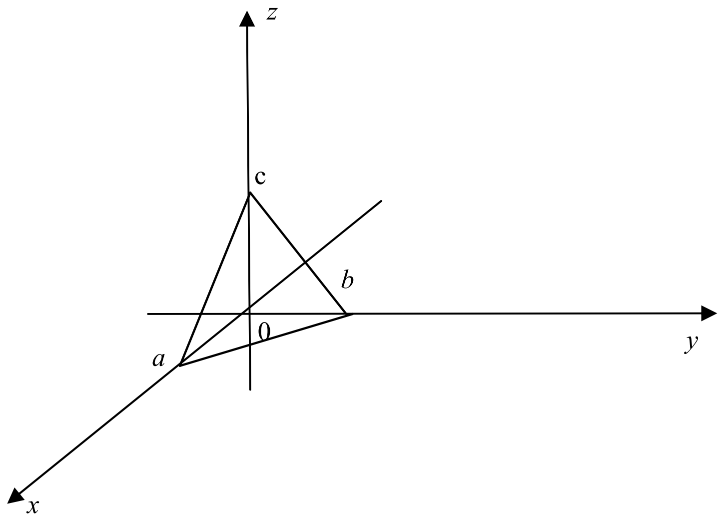
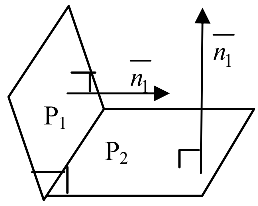
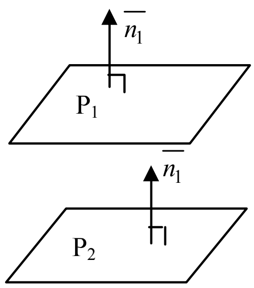
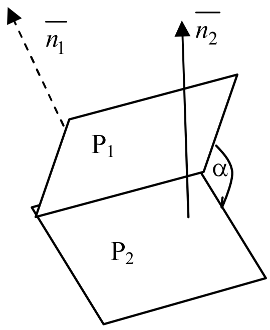


Рис. 3.1.3

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей, нахождения угла между ними сводится к аналогичным задачам для нормальных векторов этих плоскостей. Удобнее проиллюстрировать взаимное расположение плоскостей в пространстве в форме табл. 3.1.1 В данной таблице две плоскости заданы своими общими уравнениями: P_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; P_2; $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Таблица 3.1.1

Взаимное расположение плоскостей в пространстве

	Случаи взаимного расположения плоскостей	Геометрическая Интерпретация	Формулировка условий
1.	Плоскость P_1 перпендикулярна плоскости P_2 ($P_1 \perp P_2$)		Так как $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$, то их скалярное произведение равно нулю $\Downarrow$ $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$
2.	Плоскость P_1 параллельна плоскости P_2 ($P_1 \| P_2$)		Так как $\overline{n_1} \| \overline{n_2}$, то их координаты пропорциональны $\Downarrow$ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
3.	Плоскости P_1 и P_2 пересекаются под произвольным углом α		Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ $\Downarrow$ $\cos\alpha = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\lvert\overline{n_1}\rvert \cdot \lvert\overline{n_2}\rvert} =$ $= \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Замечание. Для нахождения ***расстояния от точки*** $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ***до плоскости*** P: $Ax + By + Cz + D = 0$ пользуются формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ (рис. 3.1.4).}$$

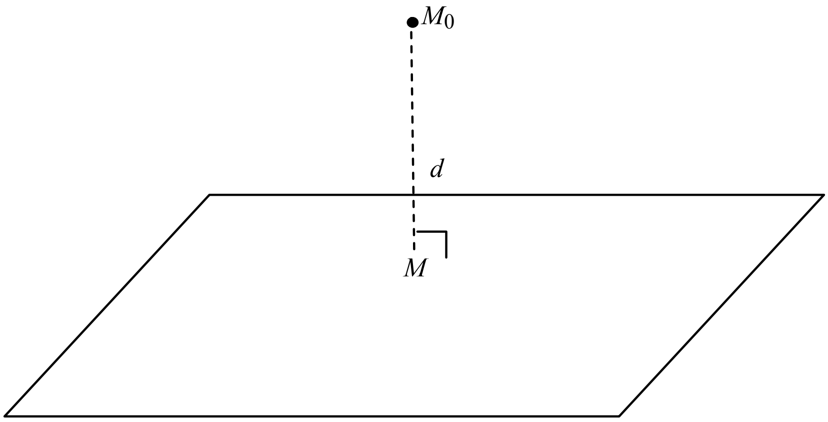


Рис. 3.1.4

Типовые задания

Пример 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -3; 4)$ и имеющей нормальный вектор $\overline{n}$=(5; 6; -7).

Решение. Так как в данном случае $x_0 = 2, y_0 = -3, z_0 = 4, A = 5, B = 6, C = -7$, то уравнение (3.1.2) $A(x–x_0) + B(y–y_0) + C(z–z_0) = 0$ принимает вид

$$5(x-2) + 6(y+3) - 7(z-4) = 0, \text{ или } 5x + 6y - 7z + 36 = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;-3;2)$ параллельно векторам $\overline{a}$= (5; -4; 8), $\overline{b}$= (6; -1; 7).

Решение. Данные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, так как их координаты не пропорциональны. Введем третий вектор лежащий на этой плоскости $\overline{M_1M}$, где точка $M(x; y; z)$ является текущей точкой, лежащей на плоскости. Найдем координаты этого вектора: $\overline{M_1M}$ =(x – 1; y + 3; z – 2) (рис.3.1.5).

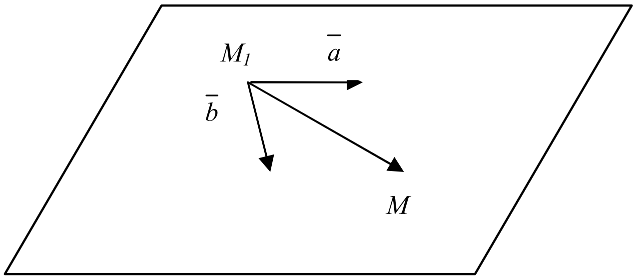


Рис. 3.1.5

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{M_1M}$ в условиях нашей задачи являются компланарными, следовательно их смешанное произведение равно нулю (подход к решению данной задачи аналогичен выводу уравнения плоскости, проходящей через три точки):

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{M_1M}=\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 5 & -4 & 8 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}=0.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, находим

$$(x-1)\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$-20(x-1)+13(y+3)+19(z-2)=0,\ 20x-13y-19z-21=0.$$

Пример 3. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью $3x-4y+5z-60=0$ и построить ее.

Решение. Разделив обе части уравнения на 60 и преобразовав его, получим $\dfrac{x}{20}-\dfrac{y}{15}+\dfrac{z}{12}=1$, или $\dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{-15}+\dfrac{z}{12}=1$.

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (3.1.4), заключаем, что a = 20, b = -15, c = 12. Таковы величины отрезков, отсекаемых плоскостью соответственно на осях Ox, Oy, Oz (рис.3.1.6).

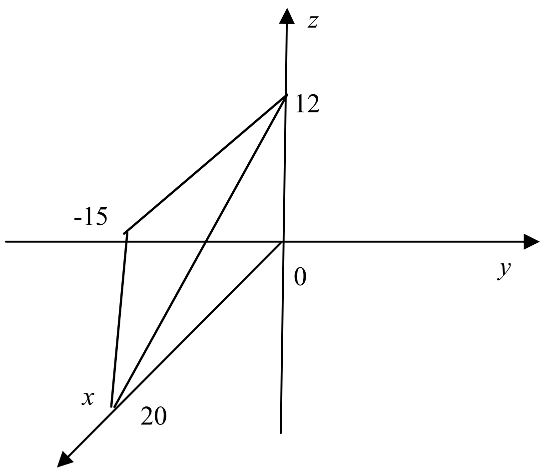


Рис. 3.1.6

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(9; -11; 5)$, $M_2(7; 4; -2)$, $M_3(-7; 13; -3)$.

Решение. В соответствии с уравнением (3.1.3) получаем

$$\begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ 7-9 & 4+11 & -2-5 \\ -7-9 & 13+11 & -3-5 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ -2 & 15 & -7 \\ -16 & 24 & -8 \end{vmatrix}=-8\begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ -2 & 15 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ -2 & 15 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-9)\begin{vmatrix} 15 & -7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (y+11)\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (z-5)\begin{vmatrix} -2 & 15 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$6(x-9)+12(y+11)+24(z-5)=0,\ (x-9)+2(y+11)+4(z-5)=0,$$

$$x+2y+4z-7=0.$$

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;3;-5)$ и параллельной плоскости $x-2y+4z-1=0$.

Решение. Это уравнение будем искать в виде $x-2y+4z+D=0$, где D – неизвестный свободный член в общем уравнении плоскости (полагаем отношение соответствующих координат нормальных векторов параллельных плоскостей равным единице).

Так как плоскость проходит через точку M_0, то ее координаты должны удовлетворять последнему уравнению:

$$2-2\cdot 3+4\cdot(-5)+D=0 \Rightarrow 2-6-20+D=0 \Rightarrow D=24.$$

Следовательно, $x-2y+4z+24=0$ - искомое уравнение.

Пример 6. Найти угол между двумя плоскостями $11x-8y-7+6=0$; $4x-10y+z-5=0$.

Решение. Косинус угла найдем по формуле из табл. 3.1.1

$$\cos\alpha = \frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|} = \frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

подставив в нее значения координат нормальных векторов соответствующих плоскостей $A_1=11$, $B_1=-8$, $C_1=-7$, $A_2=4$, $B_2=-10$, $C_2=1$:

$$\cos\varphi = \frac{11\cdot 4+(-8)\cdot(-10)+(-7)\cdot 1}{\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}} = \frac{44+80-7}{\sqrt{234}\sqrt{117}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 7. вычислить расстояние от точки $M_0(4;\ 3;\ 6)$ до плоскости $2x-y-2z-8=0$.

Решение. Подставив в формулу $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ значения $x_0=4, y_0=3, z_0=6, A=2, B=-1, C=-2D=-8$, получим

$$d=\frac{|2\cdot 4-3-2\cdot 6-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|-15|}{3}=5.$$

Пример 8. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x+2y-2z-1=0$, $x+2y-2z+5=0$.

Решение. Это расстояние равно расстоянию любой точки одной плоскости до другой. Выберем на первой плоскости произвольную точку. Приняв, например, что $y_0=1, z_0=1$, из уравнения $x+2y-2z-1=0$ найдем $x_0=1$. По формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ находим расстояние от точки $M_0(1;\ 1;\ 1)$ до плоскости $x+2y-2z+5=0$: $d=\frac{|1+2-2+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3}=2$.

Задания для самостоятельного решения

1. Для каждого из случаев записать уравнение плоскости (рис. 3.1.7, *а*, *б*, *в*).
2. Указать особенности расположения следующих плоскостей:

а) $2x+y+7=0$; д) $4x+2z=0$; б) $x=5$; е) $7x+3y+2z=0$;
в) $z=0$; ж) $y-8=0$; г) $y-7z+2=0$.

3. Составить уравнение одной из граней тетраэдра $A(5;4;3)$, $B(2;3;-2)$, $C(3;4;2)$, $D(-1;2;1)$ и построить ей соответствующую плоскость.
4. Вычислить угол между плоскостями $2x-y+2z-15=0$ и $6x-3y+3z-2=0$.
5. Вычислить расстояние между плоскостями $2x-y+z-1=0$ и $6x-3y+3z-2=0$.
6. Установить, какие из следующих плоскостей параллельны, перпендикулярны, совпадают и пересекаются под произвольным углом:

а) $2x-3y+5z-10=0$; г) $-3x-2y+9=0$; б) $4x+7y-6z+3=0$;
д) $4x-6y+10z-20+0$; в) $-4x+6y-10z+3=0$.

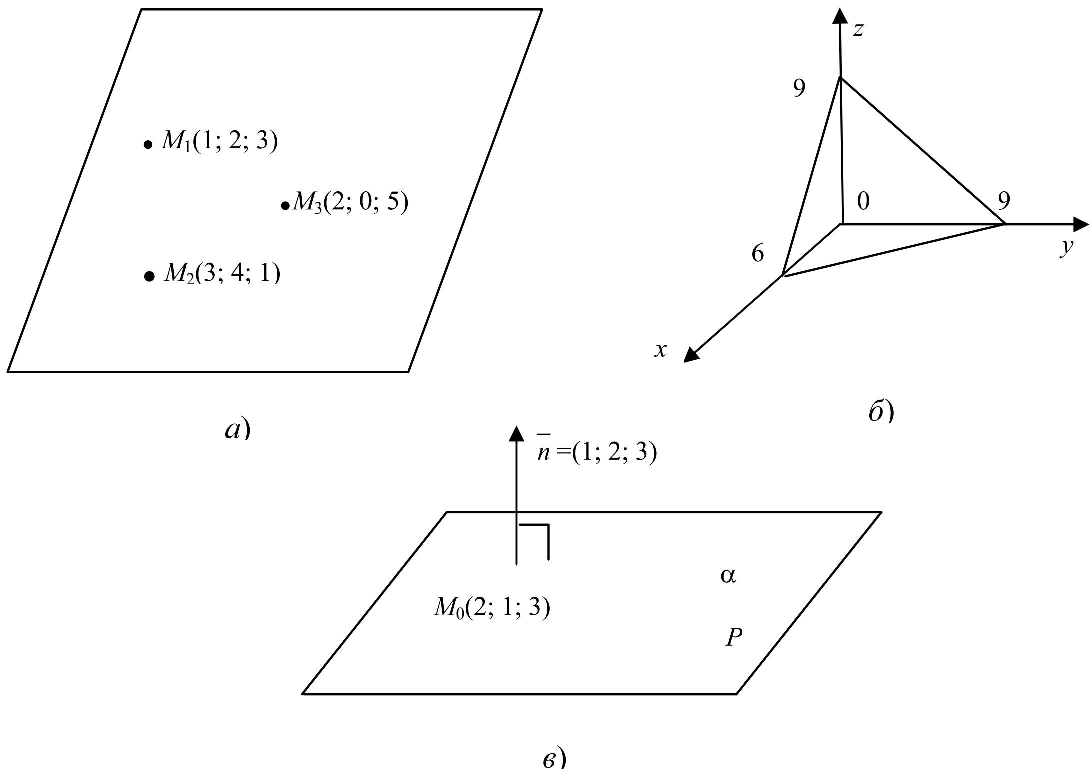


Рис. 3.1.7

7. Записать уравнение плоскости параллельной плоскости Oxz и проходящую через точку $M_0(7; -3; 5)$.

Ответ: $y+3-0$

8. Записать уравнение плоскости проходящей через ось Oz и точку $A(-3;1;-2)$.

Ответ: $x + 3y = 0$.

9. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $C(3; 4; -5)$ параллельно векторам $\bar{a} = (3; 1; -1)$ и $\bar{b} = (1; -2; 1)$.

Ответ: $x+4y+7z+16 = 0$.

3.1.2. Прямая на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть на плоскости фиксирована некоторая декартова система координат и задана прямая линия L. Ясно, что координаты точек, лежащих на прямой, не могут быть произвольными, а должны удовлетворять определенным соотношениям.

Теорема 2. В декартовой системе координат любая прямая линия на плоскости задается линейным уравнением

$$Ax + By + C = 0, \qquad (3.1.5)$$

причем $A^2 + B^2 > 0$ (A, B – заданные действительные числа).

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 3. Каждое линейное уравнение вида (3.1.5) в декартовой системе координат на плоскости определяет прямую линию, причем $A^2 + B^2 > 0$ (A, B – заданные действительные числа).

Рассмотренные теоремы полностью решают вопрос об уравнении прямой на плоскости. Уравнение вида (3.1.5), или ему эквивалентное

$$A(x\text{-}x_0) + B(y-y_0) = 0, \tag{3.1.6}$$

называется ***общим уравнением прямой.***

Геометрический смысл общего уравнения прямой заключается в том, что оно описывает прямую, проходящую через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(A;B)$, который называется ***нормальным вектором прямой***:

$M_0(x_0,y_0) \in L \perp \overline{n}=(A;\ B)$ (рис. 3.1.8).

Определение 2. Общее уравнение прямой называется ***полным,*** если все его коэффициенты A, B и C отличны от нуля. Если хотя бы один из них равен нулю, то уравнение называется ***неполным.*** Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений:

1) $C = 0 \Leftrightarrow O \in L$; 2) $A = 0 \Leftrightarrow L \parallel Ox$;
3) $B = 0 \Leftrightarrow L \parallel Oy$; 4) $A = C = 0 \Leftrightarrow L \equiv Ox$;
5) $B = C = 0 \Leftrightarrow L \equiv Oy$.

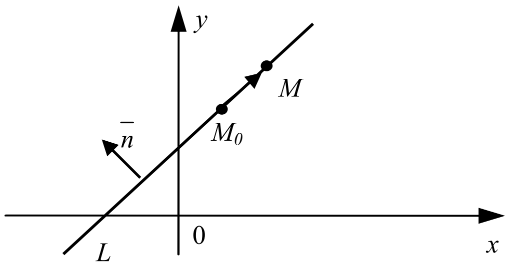


Рис. 3.1.8

Для полного исследования прямых вполне достаточно использовать общее уравнение прямой. Однако прямая – это один из наиболее простых геометрических объектов. Поэтому прямая в той или иной форме встречается в различных задачах науки и техники. Особенно если учесть, что между прямыми и линейными уравнениями существует взаимно-однозначное соответствие. В связи с этим большое значение приобретает разработка наиболее эффективных методов решения задач, в которых используется понятие прямой. С этой целью вводятся ***различные формы уравнений прямой.***

Из школьного курса математики известно ***уравнение прямой с угловым коэффициентом***

$$y = kx+b \tag{3.1.7}$$

Геометрический смысл коэффициента k – это тангенс угла наклона прямой к оси Ox, т.е. $k = \mathrm{tg}\alpha$, b – это отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy.

Уравнение эквивалентное уравнению (3.1.7) – это уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ в направении, определяемой угловым коэффициентом k:

$$y - y_0 = k\,(x - x_0). \qquad (3.1.8)$$

Каноническое уравнение прямой **–** это уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\, y_0)$ и параллельной вектору $\bar{s}=(l;\, m)$ (рис. 3.1.9):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \qquad (3.1.9)$$

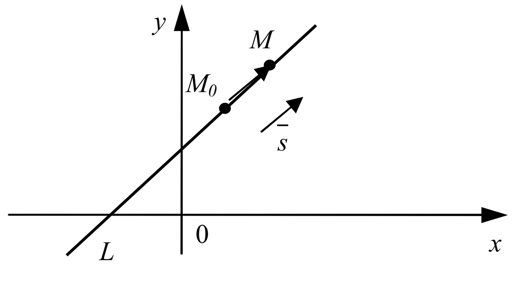


Рис. 3.1.9

Геометрический смысл канонического уравнения прямой заключается в том, что оно описывает прямую, проходящую через точку $M_0(x_0;\, y_0)$ параллельно вектору $\bar{s}=(l;\, m)$ – ***направляющему вектору*** прямой, который называется направляющим вектором прямой:

Замечание. В каноническом уравнении один из знаменателей l или m может оказаться равным нулю. Любую пропорцию вида $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ договариваются понимать как равенство $ad=bc$. Тогда обращение в нуль одного из знаменателей означает обращение в нуль соответствующего числителя. Пусть, например, $l=0$, то, поскольку $m\neq0$, из равенства $l(y - y_0) = m(x - x_0)$ заключаем, что $x - x_0 = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$ выводится из канонического уравнения прямой и записывается в следующем виде :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ (рис. 3.1.7).} \qquad (3.1.10)$$

Параметрические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой получаются из канонического уравнения, если за параметр t обозначить левую и правую части уравнения (3.1.9) и записываются в следующем виде

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \qquad (3.1.11)$$

Уравнение прямой «в отрезках» имеет следующий вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (3.1.12)$$

Геометрический смысл параметров a и b состоит в том, что они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая на осях координат: Ox и Oy соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат).

Нормальное уравнение прямой – это уравнение вида

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – направляющие косинусы вектора $\overline{n_0}\ \text{Р}\ \overline{n} = (A;B)$, $p = |C| \big/ \sqrt{A^2+B^2}$, и называется ***нормальным*** (или ***нормированным***) уравнением прямой.

Для того. чтобы перейти от общего уравнения прямой к нормальному, его нужно умножить на величину $\mu = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, называемую ***нормирующим множителем.*** Знак «+» или «–» выбирается таким образом, чтобы последнее слагаемое было отрицательным

Нормальное уравнение прямой позволяет найти расстояние от точки до прямой. Формула для нахождения ***расстояния от точки*** $M_0(x_0;\ y_0)$ ***до прямой*** L записывается следующим образом:

$$d = \rho(M_0, L) = \left| x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta - p \right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \quad (3.1.13)$$

Взаимное расположение прямых на плоскости

Исходя из геометрического смысла общего или канонического уравнения прямой можно легко получить условия, характеризующие взаимное расположение двух прямых, поскольку такая задача сводится к аналогичной задаче для нормальных или направляющих векторов.

1) Исследуем взаимное расположение двух прямых, каждая из которых заданна общим уравнением или каноническим.

Пусть две прямые заданы общими:

$$L_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } L_2\colon A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

или каноническими уравнениями:

$$L_1\colon \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \text{ и } L_2\colon \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Тогда нормальными векторами этих векторов будут векторы $\overline{n_1}=(A_1;B_1)$ и $\overline{n_2}=(A_2;B_2)$, а направляющими $\overline{s_1}=(l_1;\ m_1)$ и $\overline{s_2}=(l_2;\ m_2)$.

На плоскости две прямые могут быть: а) либо параллельны, б) либо совпадать, в) либо пересекаться.

Условие параллельности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию коллинеарности векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$, или векторов $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$, которое будет выглядеть следующим образом:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} & \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}, \\ \overline{s_1} \parallel \overline{s_2} & \Leftrightarrow \quad \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}. \end{cases} \qquad (3.1.14)$$

Две прямые совпадают, если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Две прямые пересекаются, если прямые непараллельны, т.е. если

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{l_1}{l_2}\neq\frac{m_1}{m_2}.$$

Если две прямые пересекаются, то тогда можно определить ***угол φ между прямыми*** на плоскости**.** Поскольку пересекающиеся прямые образуют два угла, в сумме дающие 180°, то обычно за угол между прямыми принимают острый угол. Данная задача сводится к определению угла между нормальными или направляющими векторами. В результате получаем

$$\cos\varphi=\begin{cases} \dfrac{\left|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}=\dfrac{\left|A_1A_2+B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \\ \dfrac{\left|\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}\right|}{\left|\overline{s_1}\right|\left|\overline{s_2}\right|}=\dfrac{\left|l_1l_2+m_1m_2\right|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}. \end{cases} \qquad (3.1.15)$$

Выделим один случай пересекающихся прямых – это случай взаимно перпендикулярных прямых. ***Условие перпендикулярности двух прямых*** эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов. В результате получим

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{n_1} \perp \overline{n_2} & \Leftrightarrow & \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 & \Leftrightarrow & A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \\ \overline{s_1} \perp \overline{s_2} & \Leftrightarrow & \overline{s_1} \cdot \overline{s_2} = 0 & \Leftrightarrow & l_1l_2 + m_1m_2 = 0. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

2) Исследуем теперь взаимное расположение двух прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентами L_1: $y = k_1x+b_1$, L_2: $y = k_2x+b_2$.

Поскольку за ***угол между прямыми*** принимается острый угол, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|. \quad (3.1.17)$$

Прямые параллельны тогда, когда тангенс угла между ними равен нулю, т.е. ***условие параллельности прямых*** имеет вид

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2. \quad (3.1.18)$$

Условие перпендикулярности прямых записывается следующим образом:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}. \quad (3.1.19)$$

Прежде чем приступить к решению конкретных задач, подведем некоторые итоги. Чтобы написать уравнение прямой, нужно знать точку, которая принадлежит данной прямой, и вектор, который перпендикулярен или параллелен данной прямой. Точка, как правило, уже известна или ее довольно легко найти. Трудности вызывает нахождение вектора. Если окажется, что найденный вектор параллелен данной прямой, то для написания уравнения прямой следует воспользоваться канонической формой уравнения прямой, если этот вектор – перпендикулярен, то – общей формой.

Типовые задания

Пример 1. Составить параметрические уравнения сторон треугольника, вершины которого находятся в точках A (2; 3), B (4; 7), C (6; 9).

Решение. Составим сначала уравнения прямых, на которых лежат стороны AB, BC и AC соответственно. Используя уравнение (3.1.10), получаем

$$AB\colon \frac{y-3}{7-3} = \frac{x-2}{4-2} \Rightarrow \frac{y-3}{4} = \frac{x-2}{2};$$

$$BC\colon \frac{y-7}{9-7}=\frac{x-4}{6-4} \Rightarrow \frac{y-7}{2}=\frac{x-4}{2};$$

$$AC\colon \frac{y-3}{9-3}=\frac{x-2}{6-2} \Rightarrow \frac{y-3}{6}=\frac{x-2}{4}.$$

Обозначим буквой t равные отношения, получим параметрические уравнения этих прямых: $x=2+2t$, $y=4t+3$ (AB); $x=4+2t$, $y=7+2t$ (BC), $x=2+4t$, $y=3+6t$ (AC).

Пример 2. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат прямой, заданной уравнением $7x-3y-21=0$ и построить прямую.

Решение. Разделив уравнение $7x-3y-21=0$ почленно на 21, получим

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{7}-1=0 \text{ или } \frac{x}{3}+\frac{y}{(-7)}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением прямой «в отрезках» на осях (3.1.12), заключаем, что $a = 3$, $b = 7$. Обозначим полученную прямую l и построим ее (рис. 3.1.10).

Пример 3. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $5x+3y+15=0$, $x+4y-7=0$.

Решение. Применяем формулу (3.1.15). Так как в данном случае A_1=5, B_1=3, A_2=1, B_2=4, то

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot 1+3\cdot 4}{\sqrt{25+9}\cdot\sqrt{1+16}}=\frac{17}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{17}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi=45°.$$

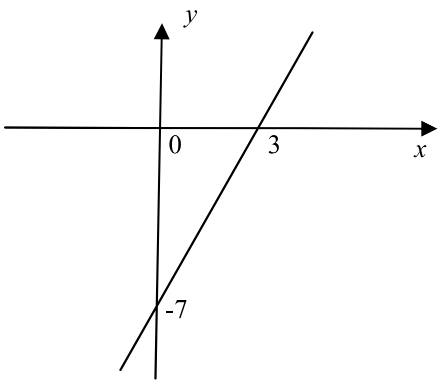


Рис. 3.1.10

Пример 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(4; -5) и параллельной прямой $3x+4y+12=0$.

Решение. Искомое уравнение имеет вид (3.1.5) $3x+4y+C=0$, где C пока не определено, так как искомая прямая и заданная параллельны. Чтобы найти значение C, необходимо подставить координаты точки M в искомое уравнение (точка M лежит на прямой, поэтому ее координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой). Подставляя координаты $x=4$, $y=-5$ в уравнение заданной в условии прямой, получаем $3\cdot 4+4\cdot(-5)+C=0 \Rightarrow \quad C=20-12=8$. Следовательно, уравнение искомой прямой запишется следующим образом: $3x+4y+8=0$.

Пример 5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(-3;2) и перпендикулярной прямой $4x+5y-7=0$.

Решение. Искомое уравнение имеет вид $5x-4y+C=0$. Действительно, для прямых выполнено условие для координат нормальных векторов искомой и заданной прямых $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$: $4 \cdot 5 + 5 \cdot (-4) = 0$. Точка M(-3; 2) лежит на прямой $5x-4y+C=0$, поэтому ее координаты должны удовлетворять этому уравнению: $5 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 + C = 0$. Отсюда находим, что C = 23. Итак, уравнение прямой принимает вид $5x-4y+23=0$.

Пример 6. Вершины треугольника находятся в точках A(3; 4), B(-2; 1), C(-3; -5). Составить уравнение прямой, на которой лежит высота, опущенная из вершины B на сторону AC.

Решение. Найдем сначала угловой коэффициент прямой, проходящей через точки A и C. Считая точку A первой, точку C второй, т.е. полагая $x_1 = 3$, $y_1 = 4$, $x_2 = -3$, $y_2 = -5$, по формуле $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ получаем

$$\frac{y-4}{-5-4} = \frac{x-3}{-3-3} \Rightarrow \frac{y-4}{-9} = \frac{x-3}{-6} \Rightarrow -6(y-4) = -9(x-3) \Rightarrow$$

$$-6y+24 = -9x+27 \Rightarrow -6y = -9x+3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{3}{2}.$$

Прямая, на которой лежит высота, опущенная из точки B на сторону AC, будет перпендикулярна прямой, проходящей через точки A и C. Угловой коэффициент этой прямой обозначим через k_2. Используя условие (3.1.19) перпендикулярности двух прямых, заданное формулой $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, находим, $k_2 = -\dfrac{2}{3}$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точку B(-2; 1) и имеющей заданный угловой коэффициент k_2. Подставляя значения $x_0 = -2$, $y_0 = 1$, $k = -\dfrac{2}{3}$ в уравнение (3.1.8), получаем $y-1 = \dfrac{(-2)}{3} \cdot (x-(-2))$, $3(y-1)+2(x+2)=0$, $2x+3y+1=0$.

Пример 7. Найти расстояние от точки M_0(-7; 4) до прямой, заданной уравнением $4x-3y-15=0$.

Решение. Воспользуемся формулой $d == \dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Так как в данном случае $x_0 = -7$, $y_0 = 4$, A = 4, B = -3, C = -15, то $d = \dfrac{|4 \cdot (-7) - 3 \cdot 4 - 15|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 11$.

Пример 8. Дан треугольник с вершинами *P*(2;-1), *Q*(6;-4), *R*(10;3). Найти длину высоты, опущенной из точки *R*.

Решение. Задача сводится к вычислению расстояния от точки *R* до прямой *PQ*. Запишем уравнение этой прямой. На основании уравнения $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ имеем $\frac{y+1}{-4+1}=\frac{x-2}{6-2}$, или $3x+4y-2=0$. Расстояние точки *R*(10;3) до этой прямой вычислим по формуле

$$d==\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\cdot 10+4\cdot 3-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8.$$

Следовательно, длина высоты равна 8.

Пример 9. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x-4y-7=0$, $8x+6y-1=0$.

Решение. В соответствии с формулой $d==\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ получаем

$$\frac{3x-4y-7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\pm\frac{8x+6y-1}{\sqrt{8^2+6^2}}.$$

Преобразуя эти уравнения, находим

$$\frac{3x-4y-7}{5}=\pm\frac{8x+6y-1}{10},\ 2(3x-4y-7)=\pm(8x+6y-1).$$

Отсюда получаем уравнение биссектрис $2x+14y+13=0$, $14x-2y-15=0$.

Пример 10. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+2=0$ и $x+y-4=0$ и уравнение одной из диагоналей $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

Решение. Решая систему уравнений $x+2y+2=0$, $x+y-4=0$, находим точку *A*(10; -6) – одну из вершин параллелограмма. Две другие вершины найдем как точки пересечения данной диагонали со сторонами, т.е. определим их координаты из систем уравнений $x+2y+2=0$, $x-2=0$; $x+y-4=0$, $x-2=0$. Это будут точки *B*(2; 2) и *D*(2; -2). Середина диагонали *BD* находится в точке *S*(2; 0).

Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то четвертая вершина $C(x;y)$ может быть найдена как конец отрезка *AC* по известному концу *A* и середине *S*: $\frac{x+10}{2}=2$, $\frac{y+(-6)}{2}=0$. Отсюда получаем $x=-6$, $y=6$, т.е. точку C(-6;6) – четвертую вершину параллелограмма $ABCD$.

Задания для самостоятельного решения

1. Для каждого из случаев записать уравнение прямой в удобной форме (рис.3.1.11).

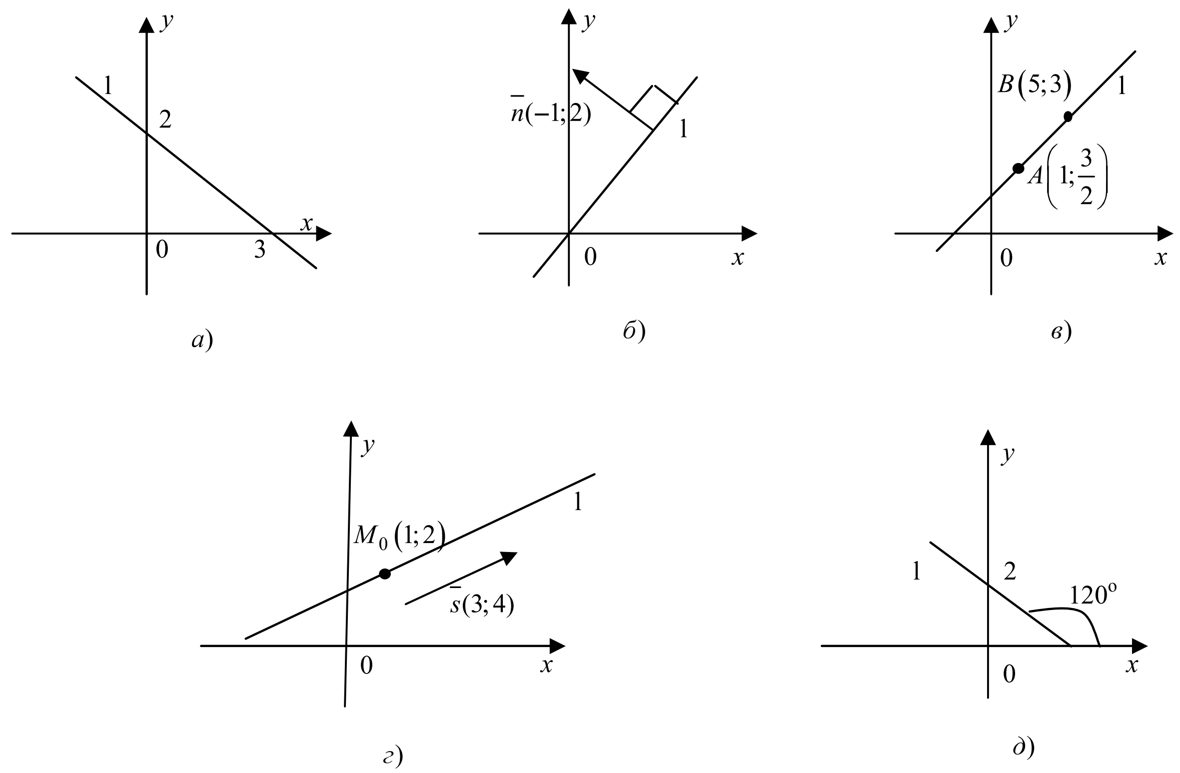


Рис. 3.1.11

2. Укажите, какие из предлагаемых уравнений задают прямую и построить прямую:

а) $x+y^2=1$; б) $y=2x+3$; в) $x{\cdot}y=10$; г) $7x-3y+8=0$.

3. Найти точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, где A(-1; -3), B(3; 5), C(5; 2), D(3; -5).

Ответ: (3; $\frac{1}{3}$).

4. Дан треугольник с вершинами A(-2; 4), B(3; 1),C(10; 7). Найти:
   - а) уравнение стороны AB;
   - б) уравнение медианы;
   - в) уравнение высоты CH;
   - г) длину высоты CH;
   - д) уравнение биссектрисы угла при вершине C.

5. Исследовать взаимное расположение прямых:

а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$, $6x+4y-3=0$; б) $2y+2x-1=0$, $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}$;

в) $y=\frac{1}{3}x-1$; $3x+y+10=0$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -2)$ параллельно оси Oy.

3.1.3. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве. Задачи на взаимное расположение прямых и плоскостей

Любую прямую в пространстве можно задать в виде пересечения каких-либо двух плоскостей системой двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{3.1.20}$$

которые называются ***общими уравнениями прямой в пространстве.***

Однако при решении многих задач более удобным является ***канонические уравнения прямой***:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{3.1.21}$$

Геометрический смысл этих уравнений состоит в том, что они описывают прямую, проходящую через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\bar{s}=(l;m;n)$ – ***направляющему вектору*** прямой. Коэффициенты l, m и n могут равняться нулю. Это означает, что и соответствующий числитель тоже будет равен нулю, и прямая будет перпендикулярна соответствующей оси координат.

С каноническими уравнениями тесно связано параметрические уравнения прямой на плоскости. Параметрические уравнения прямой получаются из канонических уравнений, если за параметр t обозначить каждую часть уравнения (3.1.21) и записываются в следующем виде

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t. \end{cases} \tag{3.1.22}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M(x_1;y_1;,z_1)$ и $M(x_2;y_2;,z_2)$ получается из канонического уравнения прямой и записывается в следующем виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.1.23)$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут быть ***параллельными, пересекаться и скрещиваться*** (частный случай, когда прямые сливаются, мы рассматривать не будем). Угол между прямыми в пространстве находится, как угол между соответствующими им направляющими векторами по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}}{\left|\overline{s_1}\right|\cdot\left|\overline{s_2}\right|}. \qquad (3.1.24)$$

Зная геометрический смысл канонического уравнения, можно легко записать условия параллельности, перпендикулярности двух прямых, поскольку такая задача сводится к аналогичной задаче для соответствующих направляющих векторов.

Если две прямые не параллельны, то они либо пересекаются, либо скрещиваются. Поясним, как это определить.

Пусть заданы канонические уравнения непараллельных прямых:

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } L_2:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \text{ (рис. 3.1.12).}$$

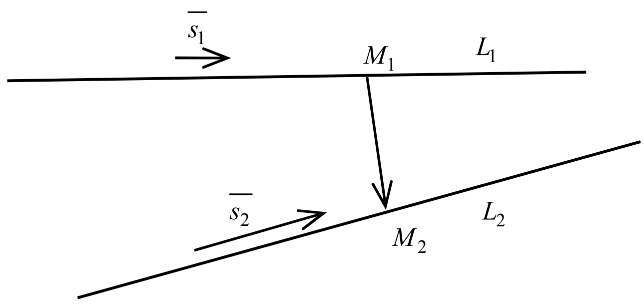


Рис. 3.1.12

Рассмотрим три вектора $\overline{s_1} \parallel L_1$, $\overline{s_2} \parallel L_2$, $\overline{M_1M_2}$, где $M_1 \in L_1$, $M_2 \in L_2$.Тогда, если прямые пересекаются, то они лежат в одной плоскости. Следовательно, рассматриваемые три вектора будут компланарными. Это означает, что их смешанное произведение равно нулю. Таким образом, ***условие пересечения двух прямых*** L_1 и L_2 ($\overline{s_1} \nparallel \overline{s_2}$) будет иметь вид

$$\overline{s_1} \cdot \overline{s_2} \cdot \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если это условие не выполняется, то прямые ***скрещиваются.***

Прямые в пространстве являются ***параллельными***, если выполняются следующие условия

$$\overline{M_1M_2} \nparallel \overline{s_1}\text{, но } \overline{s_1} \parallel \overline{s_2} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Взаимное расположение прямых и плоскостей

Пусть заданы прямая $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ своим каноническим уравнением и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ своим общим уравнением, то есть известны направляющий вектор прямо $\overline{s} = (l;\, m;\, n)$, координаты точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, лежащей на прямой, и нормальный вектор плоскости $\overline{n} = (A;\, B;\, C)$. Под ***углом φ между прямой и плоскостью*** будем понимать острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис.3.1.13).

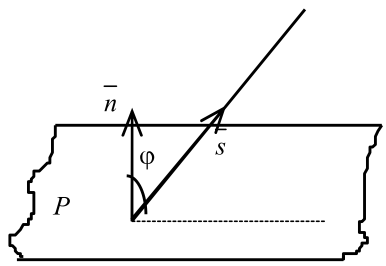


Рис. 3.1.13

Этот угол вычисляется по следующей формуле, расписанной покоординатно:

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{s} \cdot \overline{n}|}{|\overline{s}| \cdot |\overline{n}|} = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (3.1.25)$$

Если прямая параллельна плоскости, то нормальный вектор плоскости будет перпендикулярен направляющему вектору прямой, то есть $\overline{n} \perp \overline{s} \Rightarrow \overline{n} \cdot \overline{s} = 0 \Rightarrow A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0$ – это ***условием параллельности прямой и плоскости.***

Если прямая перпендикулярна плоскости, то нормальный вектор плоскости параллелен направляющему вектору прямой, то есть $\overline{n} \parallel \overline{s} \Rightarrow \dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$ – ***это условие*** перпендикулярности прямой и плоскости.

Если ***прямая принадлежит плоскости,*** то должны выполняться два условия: 1) точка M_0 принадлежит плоскости, то есть $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$; 2) условие параллельности прямой и плоскости.

Для нахождения ***расстояния между параллельными прямыми*** в пространстве удобно использовать формулу**:**

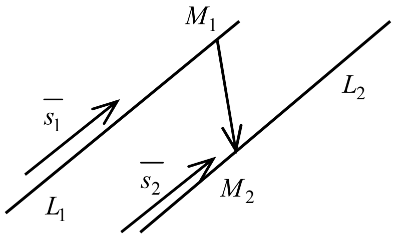


Рис. 3.1.14

$$d = \frac{\left|\overline{s} \times \overline{M_1M_2}\right|}{\left|\overline{s}\right|} \text{ (рис. 3.1.14).}$$

Аналогично можно записать формулу для нахождения ***расстояния между скрещивающимися прямыми***:

$$d = \frac{\left|\overline{s_1} \cdot \overline{s_2} \cdot \overline{M_1M_2}\right|}{\left|\overline{s_1} \times \overline{s_2}\right|}.$$

Типовые задания

Пример 1. Записать параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(7; -9; 8)$ параллельно вектору $\overline{s}=(4; 3; -2)$.

Решение. Так как в данном случае $x_0 = 7, y_0 = -9, z_0 = 8,$, $a_1 = 4, a_2 = 3, a_3 = -2$ параметрические уравнения (3.1.22) принимают вид

$$x = 7 + 4t,\ y = -9 + 3t,\ z = 8 - 2t,$$

а канонические уравнения (3.1.21) запишутся так:

$$\frac{x-7}{4} = \frac{y+9}{3} = \frac{z-8}{-2}.$$

Пример 2. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(6;-5;4)$, $M_2(8;-7;9)$. Привести эти уравнения к параметрическому виду.

Решение. Поскольку $x_1 = 6, y_1 = -5, z_1 = 4, x_2 = 8, y_2 = -7, z_2 = 9$, то уравнения (3.1.23) примут вид

$$\frac{x-6}{8-6} = \frac{y+5}{-7+5} = \frac{z-4}{9-4} \text{ или } \frac{x-6}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-4}{5}.$$

Обозначая равные отношения буквой *t*, получаем параметрические уравнения данной прямой:

$$x = 6 + 2t\,,\ y = -5 - 2t\,,\ z = 4 + 5t$$

Пример 3. Уравнение прямой $x + 2y + 4z - 7 = 0$, $2x + y - z - 5 = 0$ привести к параметрическому виду.

Решение. Поскольку в этих уравнениях коэффициенты при текущих координатах непропорциональны, то плоскости, определяемые данными уравнениями, пересекаются. Данные уравнения определяют прямую. Выберем на прямой точку. Полагая в этих уравнениях, например, $z_0 - 2$, получаем $x + 2y = -1$, $2x + y = 7$. Откуда, решая данную систему уравнений, имеем, что $x_0 = 5, y_0 = -3$. На прямой зафиксирована точка M_0(5;-3;2). Зная нормальные векторы плоскостей, входящих в общее уравнение прямой в пространстве, найдем направляющий вектор этой прямой. Так как $n_1 = (1;2;4), n_2 = (2;1;-1)$, то

$$\bar{s} = \left[\overline{n_1}, \overline{n_2}\right] = \overline{n_1} \times \overline{n_2}\left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-6;9;-3).$$

Параметрические уравнения (3.1.22) данной прямой принимают вид $x = 5 - 6t, y = -3 + 9t, z = 2 - 3t$.

Пример 4.Прямая задана общими уравнениями $\begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0, \\ 3x + y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

Записать ее каноническое уравнение.

Решение. Находим

$$\bar{s} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (3,11,4)$$

Полагая в исходной системе z=0 и сладывая данные уравнения, получаем x=1, y=5. Точка M(1; 5; 0) лежит на данной прямой. Ее каноническое уравнение $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{11} = \dfrac{z}{4}$.

Пример 5. Найти координаты любой точки, принадлежащей прямой:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z - 14 = 0; \\ 6x - 5y + z - 19 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выберем одну из координат искомой точки произвольно, например, $y=0$, тогда две другие её координаты можно найти из заданной систему уравнений, если в них положить $y=0$;

$$\begin{cases} 3x+5z-14=0; \\ 6x+z-19=0. \end{cases}$$

Из решения получим $x=3$ и $z=1$. Координаты выбранной точки $(3;0;1)$.

Пример 6. Написать уравнение прямой *L* проходящей через точки $A(-7;6;5)$ и $B(5;-2;1)$. Лежат ли точки $K(-1;2;3)$ и $M(3;0;-1)$ на этой прямой.

Решение. Используя формулы (3.1.23) при $x_1=-7$, $y_1=6$, $z_1=5$ и $x_2=5$, $y_1=-2$, $z_2=1$, получим искомое уравнение прямой:

$$\frac{x+7}{5+7}=\frac{y-6}{-2-6}=\frac{z-5}{1-5}, \text{ или } \frac{x+7}{12}=\frac{y-6}{-8}=\frac{z-5}{-4}.$$

Подставляем в эти уравнения координаты точек *K* и *M*:

$$\frac{-1+7}{12}=\frac{2-6}{-8}=\frac{3-5}{-4}=\frac{1}{2}, \ \frac{3+7}{12}\neq\frac{0-6}{-8}=\frac{-1-5}{-4}.$$

Анализируя расчеты, можно сделать вывод, что точка *K* лежит на прямой *AB*, а точка *M* не лежит на прямой *AB*.

Пример 7. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(-9;0;7)$ перпендикулярно двум данным прямым:

$$\frac{x+4}{-2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+5}{3} \text{ и } \frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+1}{-5}.$$

Решение. Найдем направляющий вектор $\vec{s}$ искомой прямой l. Так как он должен быть перпендикулярен направляющим векторам $\overline{s_1}=(-2;-1;3)$ и $\overline{s_2}=(4;6;-5)$ прямых l_1 и l_2, то в качестве векторов можно взять векторное произведение $\overline{s_1}$ и $\overline{s_2}$:

$$\overline{s}=\overline{\mathrm{s}_1}\times\overline{s_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix}=-13\bar{i}+2\bar{j}-8\bar{k} \text{ (рис. 3.1.15).}$$

Зная направляющий вектор $\overline{s}=(-13;2;-8)$ и точку $M\left(-8;0;7\right)$, через которую проходит эта прямая, используя формулу (3.1.21), получим каноническое уравнение искомой прямой:

$$\frac{x+9}{-13}=\frac{y}{2}=\frac{z-7}{8}.$$

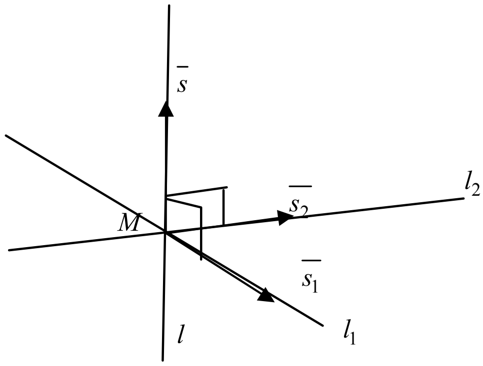


Рис. 3.1.15

Пример 8. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A\left(-1,3,2\right)$ и параллельной прямой

$$x=4+5t, y=7t, z=-8-11t.$$

Решение. Так как искомая прямая параллельна данной прямой, то в качестве её направляющего вектора можно взять направляющий вектор $\overline{s}=(5;7;-11)$ данной прямой. Используя теперь уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной вектору $\overline{s}$, в форме (3.1.21), получим искомое уравнение прямой в каноническом виде:

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{7}=\frac{z-2}{-11}.$$

Пример 9. Найти угол между двумя прямыми

$$\begin{cases} x=3+2t, \\ y=4+7t, \\ z=-5+8t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2+8t, \\ y=6-11t, \\ z=-8-7t. \end{cases}$$

Решение. Первая прямая имеет направляющий вектор $\overline{s_1}$=(2;7;8), вторая – $\overline{s_2}$=(8;-11;-7). Угол между прямыми находим, как угол между их направляющими векторами по фомуле (3.1.24):

$$\cos\varphi=\frac{\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}}{\left|\overline{s_1}\right|\cdot\left|\overline{s_2}\right|}=\frac{2\cdot 8+7\cdot(-11)+8\cdot(-7)}{\sqrt{2^2+7^2+8^2}\sqrt{8^2+(-11)^2+(-7)^2}}=\frac{-117}{\sqrt{117}\sqrt{234}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, φ=135°.

Пример 10. Доказать, что прямые $x=7+5t, y=-5-7t, z=-2-3t$ и $x=t, y=t, z=-3+2t$ пересекаются.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{M_1M_2}$=(0-7; 0-(-5); -3-(-2))=(-7;5;-1), $\overline{s_1}$=(5;-7;-3), $\overline{s_2}$=(1;1;2) и их смешанное произведение

$$\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}\cdot\overline{M_1M_2}=\begin{vmatrix}5 & -7 & -3\\ 1 & 1 & 2\\ -7 & 5 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -12 & -13\\ 1 & 0 & 0\\ 7 & 12 & 13\end{vmatrix}=0.$$

Поскольку смешанное произведение трех векторов равно нулю, то векторы компланарны; значит данные прямые лежат в одной плоскости. Так как направляющие векторы $\overline{s_1}$ и $\overline{s_2}$ этих прямых неколлинеарны (их координаты не пропорциональны), то прямые пересекаются.

Пример 11. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ с плоскостью $3x-2y+z-3=0$.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x=-1+2t,\ y=2+t, z=1-t$. Подставляя значения x, y, z в уравнения плоскости, имеем $3(-1+2t)-2(2+t)+(1-t)=0$, откуда $t=3$. Подставим найденное значение t в параметрические уравнения прямой, находим координаты точки пересечения: $x=5, y=5, z=-2$.

Пример 12. Записать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M\left(-1;2;4\right)$ на плоскость $3x-5y+z+4=0$.

Решение. За направляющий вектор искомой прямой $\vec{s}$ можно взять нормальный вектор заданной плоскости $\overline{n}=(3;-5;1)$. Следовательно, каноническое уравнение (3.1.21) перпендикуляра, проходящего через точку $M\left(-1;2;4\right)$ в виде

$$l:\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-4}{1}\ \text{(рис. 3.1.16).}$$

Пример 13. Найти угол между прямой $x=-3-t, y=5-t, z=-4+2t$ и плоскостью $2x-4y+2z-9=0$.

Решение. Применяя формулу (3.1.25) для случая $l=-1, m=-1, n=2, A=2, B=-4, C=2$, находим

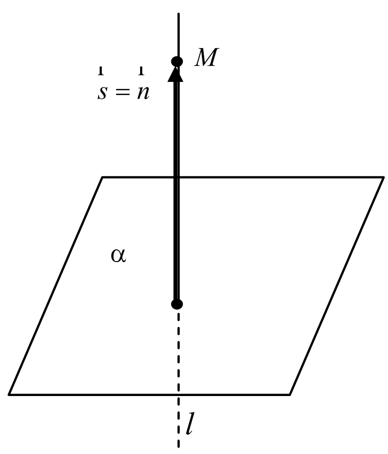


Рис 3.1.16

$$\sin\varphi = \frac{|2(-1)-4(-1)+2\cdot 2|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{24}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^{\circ}.$$

Пример 14. найти проекцию точки M(1;-2;4) на плоскость $5x-3y+6z+35=0$.

Решение. Этой проекцией является точка пересечения перпендикуляра к плоскости, проходящей через точку *M*. Для прямой, перпендикулярной плоскости, направляющим вектором будет $\overline{n}=(5;-3;6)$. Параметрические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через точку M, примут вид

$$x=1+5t, y=-2-3t, z=4+6t.$$

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, находим:

$$5(1+5t)-3(-2-3t)+6(4+6t)+35=0,\ 70t+70=0,\ t=-1.$$

При этом значении *t* из уравнений прямой получаем:

$$x=1-5=-4, y=-2+3=1, z=4-6=-2.$$

Следовательно, точка *N*(-4; 1; -2) – искомая проекция.

Задания для самостоятельного решения

1. Общее уравнение прямой

$$\begin{cases} x-2y+3z+6=0 \\ 2x-3y-4z-16=0 \end{cases}$$

Привести к каноническому виду.

Ответ: $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-4}{10}=\dfrac{z}{7}.$

2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_{:}(2,0,-3)$:

а) параллельно вектору $s=(2,-3,5)$;

б) параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{cases}$

Ответ: а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z+3}{13}$.

3. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и в случае их пересечения найти координаты точки пересечения:

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

б) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$;

в) $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Ответ: а) параллельны; б) прямая лежит в плоскости; в) пересекается в точке $M(2;3;1)$.

4*. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точку $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

Ответ: $Q(4;-1;-3)$.

5. Вычислить угол между прямой $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$ и плоскостью $2x + 3y - z + 1 = 0$.

Ответ: $\sin\varphi = 5/7, \varphi \approx 45°36'$.

6. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ перпендикулярно к плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

Ответ: $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.

7. Вычислить расстояние между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

Ответ: $d = 3$.

8. Пересекаются ли прямые $\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{5}$?

Ответ: нет.

3.2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ « ОКРУЖНОСТЬ, ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА, ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА»

3.2.1. Кривые второго порядка

Определение 1. Если в декартовой системе координат $F(x,y)$ – многочлен какой-либо степени, то линия называется ***алгебраической***, а степень многочлена – ***порядком линии***. В противном случае, линия называется ***трансцендентной*** (например, $\sin x$, $\ln x$ и др.).

С алгебраической точки зрения наиболее простыми после линий 1-го порядка (прямых) являются линии 2-го порядка, которые в декартовой системе координат в общем виде описываются многочленом второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (3.2.1)$$

Мы будем рассматривать в данном параграфе общее уравнение второго порядка специального вида:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ (A \neq 0,\ C \neq 0 \text{ одновременно}). \qquad (3.2.2)$$

Здесь нет смешанного произведения xy (от него в уравнении (3.2.1) можно избавиться поворотом около начала осей координат на угол α, определяемый из уравнения $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{2B}{A-C}$). Этот вид не удобен для построения кривых второго порядка и определения их характеристик в декартовой системе координат. Поэтому целесообразно привести данное уравнение к каноническому виду при помощи параллельного переноса координат. Аналитически это эквивалентно ***методу выделения полного квадрата*** в выражении (3.2.2):

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0; \qquad Ax^2+Dx)+(Cy^2+Ey) = -F;$$

$$A(x^2+\frac{D}{A}x)+C(y^2+\frac{E}{C}y) = -F;$$

$$A\,[x^2+2\cdot\frac{D}{2A}x+\left(\frac{D}{2A}\right)^2-\left(\frac{D}{2A}\right)^2]+C\,[y^2+2\cdot\frac{E}{2C}y+\left(\frac{E}{2C}\right)^2-\left(\frac{E}{2C}\right)^2] = -F;$$

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-\frac{D^2}{4A}+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2-\frac{E^2}{4C}=-F;\quad A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$$

Примем обозначение $P=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F$, тогда $\frac{(x+\frac{D}{2A})^2}{\frac{P}{A}}+\frac{(y+\frac{E}{2C})^2}{\frac{P}{C}}=1$.

Введем канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы, то есть такие уравнения, которые получаются при специальном выборе системы координат. Если кривая не вырождена, то, для нее, найдется такая декартова система координат, в которой уравнение примет один из трех следующих видов: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y^2=2px$ или $x^2=2ay$.

Это есть ***канонические уравнения***, соответственно, ***эллипса (окружности), гиперболы и параболы***.

Кривую линию, вообще говоря, можно определить как некоторое ***геометрическое место точек*** – это такое множество точек на плоскости, которые удовлетворяют определенному геометрическому свойству. Это свойство присуще всем точкам кривой и только им одним и отличает их от всех остальных точек плоскости.

Сформулируем определения каждой из кривых второго порядка, как геометрического места точек, обладающих определенным свойством.

Определение 2. ***Окружностью*** называют множество точек плоскости, каждая из которых равноудалена от некоторой точки, называемой центром.

Определение 3. ***Эллипсом*** называют множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Определение 4. ***Гиперболой*** – множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Определение 5. ***Параболой*** называется множество точек плоскости, для которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы

С точки зрения физического применения важны фокальные свойства эллипса, гиперболы и параболы.

Фокальное свойство эллипса: эллипс является геометрическим местом точек $M(x;y)$, сумма расстояний от каждой точки которой до фокусов F_1, F_2 есть величина постоянная и равная $2a$ (рис. 3.2.1).

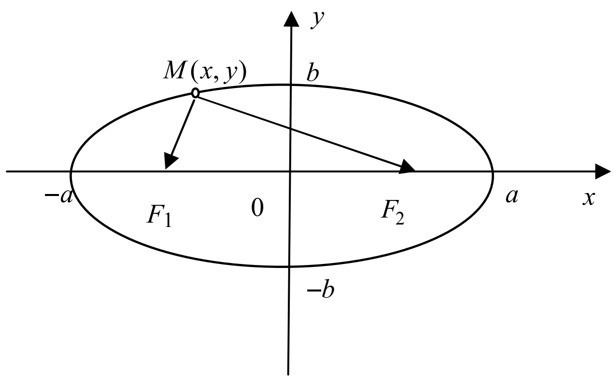


Рис. 3.2.1

***Фокальное свойство гиперболы*:** гипербола является геометрическим местом точек $M(x;y)$, абсолютная величина разности расстояний, от каждой точки которой до фокусов F_1, F_2 есть величина постоянная и равная $2a$ (рис. 3.2.2).

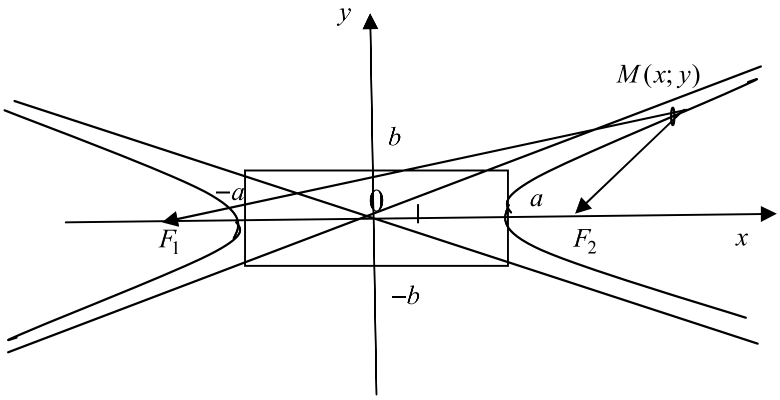


Рис. 3.2.2

***Фокально-директориальное свойство параболы*:** парабола есть геометрическое место точек, равноотстоящих от фокуса и от директрисы (рис.3.2.3).

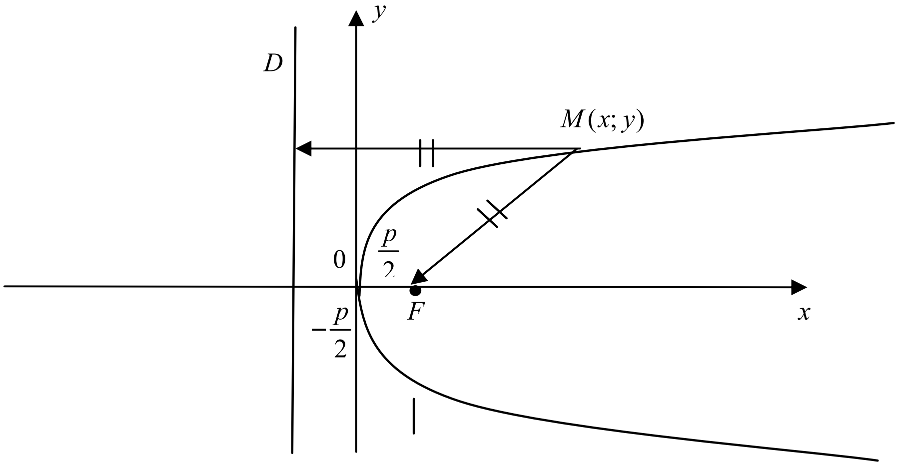


Рис. 3.2.3.

Канонические уравнения кривых второго порядка, характеристики этих кривых и геометрическое их представление наглядно иллюстрирует табл. 3.2.1.

Типовые задания

Пример 1. Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Решение. Для данного эллипса $a = 8$, $b = 3$ и поэтому

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{64-9}=\sqrt{55}\approx 7,42.$$

Следовательно, фокусы имеют координаты $F_1\left(-\sqrt{55};0\right)$ и $F_2\left(\sqrt{55};0\right)$, эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}\approx\frac{7,42}{8}\approx 0,93$.

Пример 2. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3; 2)$, $N\left(3\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{2}\right)$.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Так как точки M и N лежат на эллипсе, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\frac{3^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1,\ \frac{\left(3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{2})^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\ \frac{27}{2a^2}+\frac{2}{b^2}=1.$$

Решая полученную систему уравнений, находим, что a^2=18, b^2=8. Таким образом, получено каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$.

Пример 3. Какую линию определяет уравнение $9x^2-4y^2=36$?

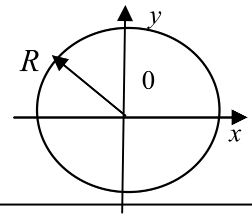
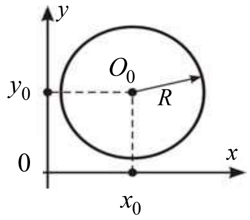
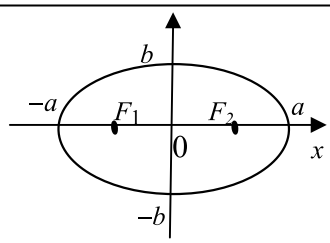
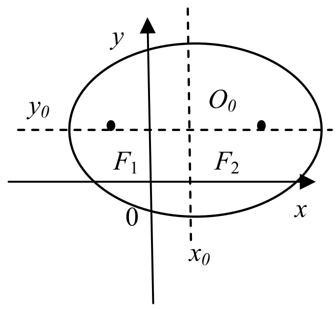
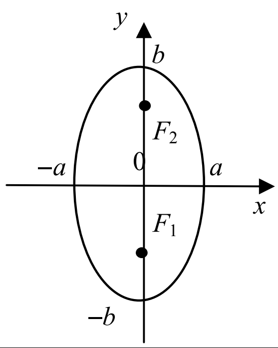
Решение. Разделив обе части уравнения на 36, получим $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. Сравнивая это уравнение с уравнением гиперболы с несмещенным центром $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, заключаем, что оно определяет гиперболу с действительной полуосью a = 2 и мнимой полуосью b = 3.

Пример 4. Записать уравнения асимптот гиперболы $4x^2-9y^2=36$.

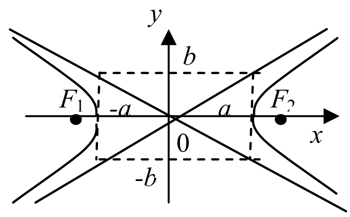
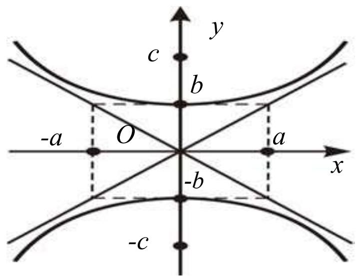
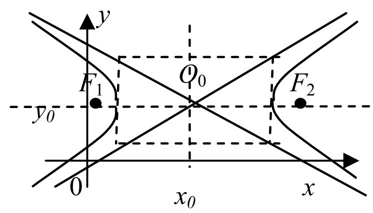
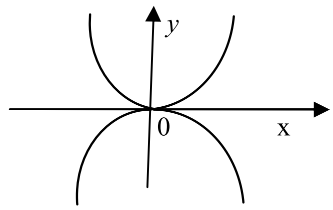
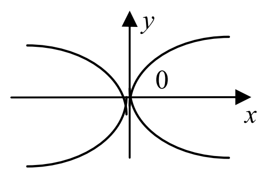
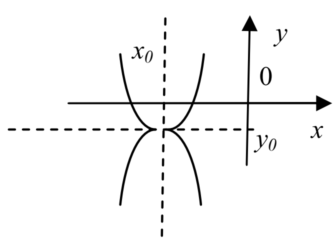
Решение. Приводя уравнение гиперболы к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, заключаем, что a^2=9, b^2=4, т.е. a=3, b=2. В соответствии с уравнениями асимптот гиперболы $y=\pm\frac{b}{a}x$ записываем: $y=\frac{2}{3}x$, $y=-\frac{2}{3}x$.

Таблица 3.2.1

Кривые второго порядка

Название линии	Уравнение кривой	Основные характеристики кривой	Геометрическое представление кривой
Окружность	$x^2 + y^2 = R^2$	$O(0,0)$ – центр; R – радиус	
	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$	$O_0(x_0, y_0)$ – центр; R – радиус	
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,	$2a$ – большая ось; $2b$ – малая ось; $2c$ – фокусное расстояние:; $c^2 = a^2 - b^2$, где $a^2 > b^2$; F_1, F_2 – фокусы; $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет	
	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$O_0(x_0, y_0)$ – центр эллипса; $2a$ – большая ось; $2b$ – малая ось; $2c$ – фокусное расстояние: $c^2 = a^2 - b^2$, где $a^2 > b^2$; F_1, F_2 – фокусы; $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет	
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$O_0(x_0, y_0)$ – центр эллипса; $2a$ – малая ось; $2b$ – большая ось; $2c$ – фокусное расстояние: $c^2 = b^2 - a^2$, где $b^2 > a^2$; F_1, F_2 – фокусы; $\varepsilon = \frac{c}{b} < 1$ – эксцентриситет	

Название линии	Уравнение линии	Основные параметры линии	Изображение линии

Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$O(0;\,0)$ – центр; $2a$ – действительная ось; $2b$ – мнимая ось; $2c$ – фокусное расстояние; $c^2=a^2+b^2$; F_1, F_2 – фокусы; $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ – эксцентриситет; $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты	
	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$O(0;\,0)$ – центр; $2a$ мнимая ось; $2b$ –действительная ось; $2c$ – фокусное расстояние:; $c^2=a^2+b^2$; F_1, F_2 – фокусы; $\varepsilon=\frac{c}{b}>1$ – эксцентриситет; $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты	
	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$O_0(x_0, y_0)$ – центр; $2a$ мнимая ось; $2b$ –действительная ось; $2c$ фокусное расстояние; $c^2=a^2+b^2$ F_1, F_2 – фокусы; $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ – эксцентриситет; $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$ – асимптоты	
Парабола	$x^2=2ay$	$O(0,0)$ – вершина; Ось Oy – ось симметрии; $a>0$ - ветви вверх; $a<0$ - ветви вниз; $F(0;\ \frac{a}{2})$ – фокус; D – директриса: $y=-\frac{a}{2}$	
	$y^2=2px$	$O(0,0)$ – вершина параболы; Ось Ox – ось симметрии; $p>0$ - ветви вправо; $p<0$ - ветви влево; $F\,(\frac{p}{2};\ 0)$– фокус; D – директриса: $x=-\frac{p}{2}$	
	$(x-x_0)^2=2a(y-y_0)$ (аналогично работают с параболой: $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$)	$O_0(x_0, y_0)$ – вершина; фокус F наносится относительно смещенной вершины; директриса D строится относительно смещенной вершины	

Пример 5. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением $5x^2-4y^2=20$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 20, получим $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. Сравнивая это уравнение с уравнением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, заключаем, что a^2=4, b^2=5, то есть a=2, $b=\sqrt{5}$. Из формулы $c^2=a^2+b^2$ для гиперболы следует, что , c = $\sqrt{4+5}$ =3, F_1(-3; 0), F_2(3; 0). По формуле для эксцентриситета гиперболы находим $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

Пример 6. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2=8x$.

Решение. Сравнивая уравнение $y^2=8x$ с уравнением $y^2=2px$, находим, что $2p$ = 8, откуда p = 4, $\frac{p}{2}=2$. В соответствие с формулой $x=-\frac{p}{2}$ получаем уравнение $x=-2$ директрисы параболы, фокус параболы находится в точке F(2; 0).

Пример 7. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2=4y$.

Решение. Сравнивая уравнение $x^2=4y$ с уравнением $x^2=2ay$, получаем $2a=4$, откуда $a=2$, $\frac{a}{2}=1$. Следовательно, фокус $F(0;\ \frac{a}{2})$ параболы находится в точке F(0;1), уравнение директрисы $y=-\frac{a}{2}$ имеет вид $y=-1$.

Пример 8. Найти координаты центра и радиус окружности, определяемой уравнением $4x^2+4y^2-8x+12y-3=0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 4, сгруппировав переменные в левой части заданного уравнения и выделив полные квадраты, получим

$$(x^2-2x+1)+y^2+2\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}-1-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=0 \text{ или } (x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2=4.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением окружности со смещенным центром $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, заключаем, что x_0= 1, $y_0=\frac{-3}{2}$, R=2.

Пример 9. Построить линию, определяемую уравнением $3y=x^2-6x+15$.

Решение. Преобразуя это уравнение, получаем $y=\frac{1}{3}((x^2-6x+9)+6)$, $y=\frac{1}{3}(x-3)^2+2$, $y-2=\frac{1}{3}(x-3)^2$, $(x-3)^2=3(y-2)$. Полученное уравнение является каноническим уравнением параболы со смещенной вершиной $O_0(3;2)$. Ветви данной параболы направлены вдоль оси Oy в положительном направлении. Построим данную параболу (рис.3.2.4).

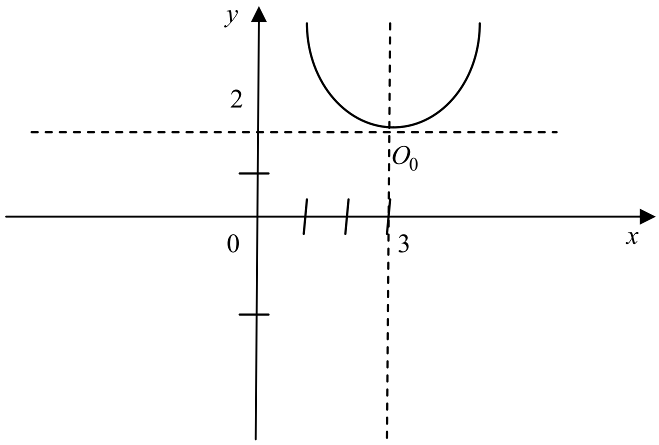


Рис. 3.2.4

Пример 10. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2-16y^2-36x-32y-124=0.$$

Решение. Преобразуем это уравнение, выделяя полный квадрат:

$$9(x^2-4x+4)-16(y^2+2y+1)-36+16-124=0,$$

$$9(x-2)^2-16(y+1)^2-144=0,\ \frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1.$$

Получили уравнение , определяющее гиперболу с полуосями a=4, b=3. Центр гиперболы находится в точке $O_0(2;-1)$. Построим полученную гиперболу (рис. 3.2.5).

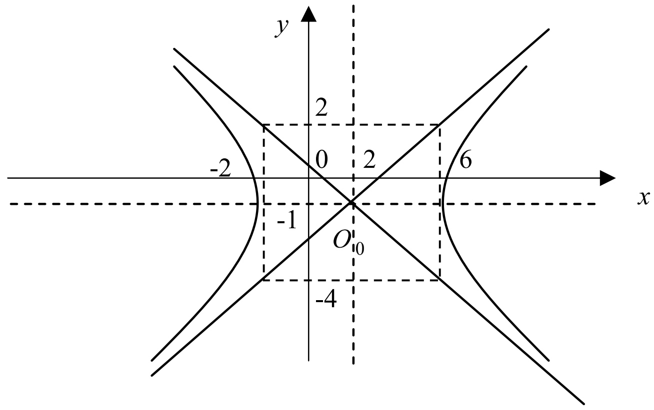


Рис. 3.2.5

Пример 11. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2+16y^2+36x-64y-44=0.$$

Решение. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения, получаем

$$9(x^2+4x+4)+16(y^2-4y+4)-36-64-44=0,$$

$$9(x+2)^2+16(y-2)^2=144,\ \frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

Это уравнение определяет эллипс со смещенным центром с полуосями a=4, b=3 (рис.2.14). Центр эллипса находится в точке, для которой точке O_0(-2;2) (рис.3.2.6).

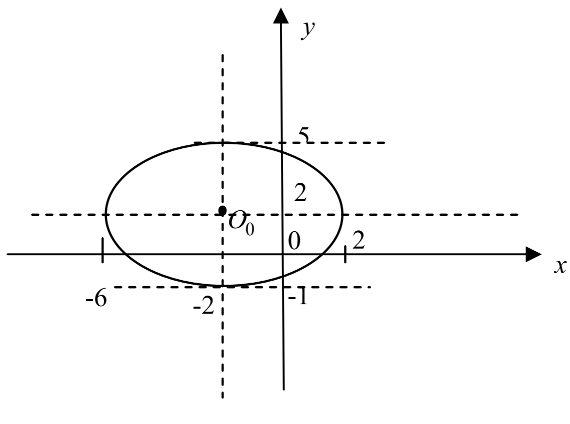


Рис. 3.2.6

Пример 12. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки A(3; 2) на расстоянии, в три раза большем, чем от точки B(-1,0).

Решение. Пусть $M(x;\, y)$ – любая точка искомой линии. Тогда по условию задачи $\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}, \left|\overline{BM}\right| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$, то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2+\left(y-2\right)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

Преобразуем его, возведя обе части в квадрат. Выделив полные квадраты в последнем уравнении приведем к уравнению вида:

$$(x+\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{45}{16},$$

которое является уравнением окружности с центром в точке O_0(-3/2; -1/4) и радиусом R=$\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (рис. 3.2.7).

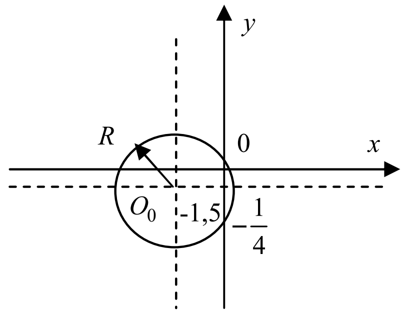


Рис. 3.2.7

Задания для самостоятельного решения

1. Определить название кривой и указать основные характеристики, построить кривую:

а) $x^2+(y-1)^2$=9; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}$=1;

в) $\frac{(y-2)^2}{9}$-$\frac{(x+3)^2}{4}$=1; г) $(y+1)^2$=-2(x-5);

д) x^2=3(y-8).

2.* Определить тип кривой второго порядка и, приведя её уравнение к каноническому виду, построить кривую:

а) x^2+y^2-4x+6y+4=0; в) x^2-*6* y^2-12x+36y-48=0;

б) 2 x^2+5 y^2 +7x-10y-3=0; г) x^2-8x+2y+18=0.

3. Составить уравнение траектории движения точки $M(x,y)$, если в любой момент времени она остаётся равноудаленной от точки $A(8;4)$ и оси ординат.

Ответ: $(y-4)^2=16(x-4)$ – парабола.

4. Записать уравнение траектории движения точки $M(x,y)$, если в любой момент времени она находится в 1,25 раза дальше от точки $A(5,0)$, чем от прямой $5x-16=0$.

Ответ: $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{144}=1$.

5. Ракета, пуск которой произведён под острым углом к горизонту, описала дугу параболы и упала на расстоянии 60 км от места старта. Зная, что наибольшая высота, достигнутая ракетой, равна 18 км, записать уравнение параболической траектории, приняв место старта за начало координат, а место падения – лежащим на положительной полуоси Ox, и определить параметр траектории.

Ответ: $(x-30)^2=-50(y-18), p=25$ км.

3.2.2. Поверхности второго порядка

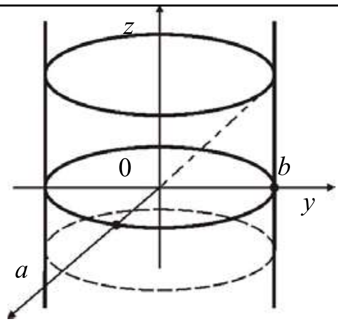
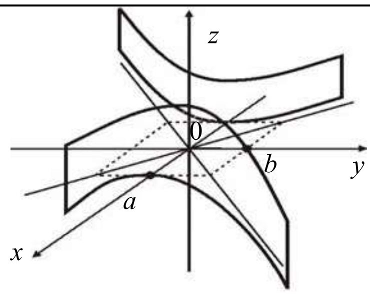
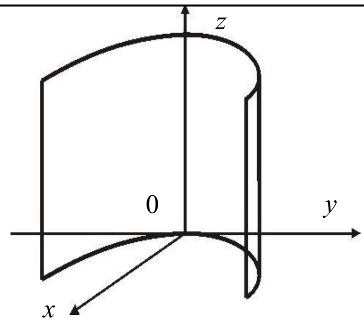
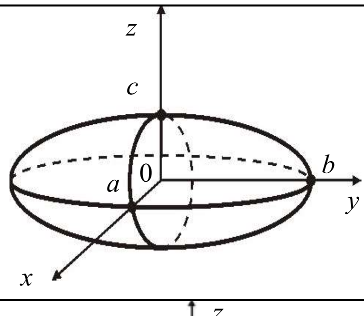
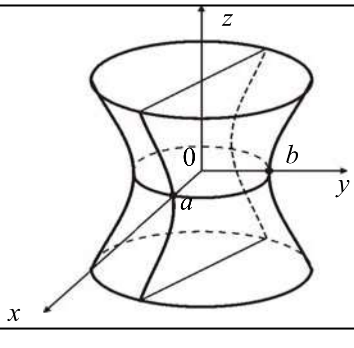
Определение 6. ***Поверхность второго порядка*** – это множество точек трехмерного пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяет уравнению (описывается в общем случае многочленом второго порядка):

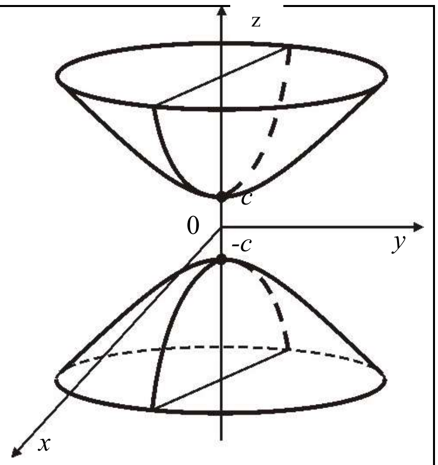
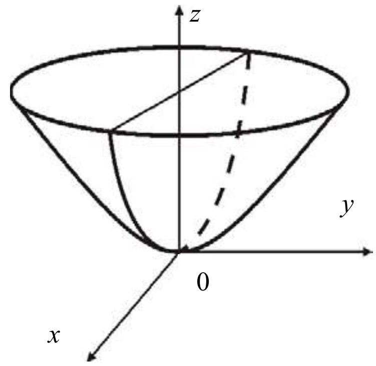
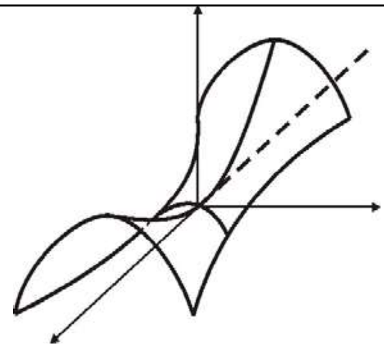
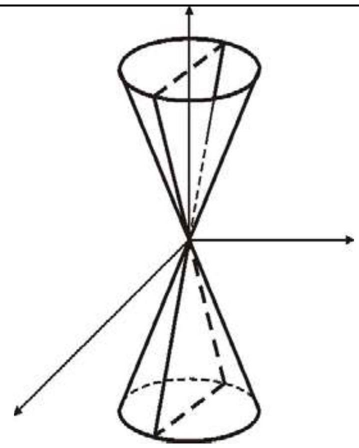
$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0, \tag{3.2.3}$$

в котором $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2 \neq 0$. Уравнение (3.2.3) называют ***общим уравнением поверхности второго порядка.***

Уравнение (3.2.2) с помощью формул преобразования координат (аналогично подходу, описанному для кривых второго порядка) можно привести к одному из перечисленных ниже уравнений, называемых каноническими. Всякая поверхность второго порядка является одной из приведенных в таблице поверхностей (табл. 3.2.2).

Таблица 3.2.2

п/п	Поверхность второго порядка	Уравнение	Чертеж
	2	3	4
1.	Эллиптический Цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
2..	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
3.	Параболический цилиндр	$y^2=2px$	
4.	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
5.	Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	

6.	Двуполостный Гиперболоид	$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	
7.	Эллиптический Параболоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$	
8.	Гиперболический параболоид	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$	
9.	Эллиптический Конус	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$	

Чтобы судить о форме поверхностей по виду их уравнений, пользуются методом сечений. ***Метод сечений*** заключается в том, что при пересечении

0

y

x

плоскости и поверхности 2-го порядка получается кривая 2-го порядка. Очевидно, что в качестве секущих плоскостей лучше выбирать плоскости, которые параллельны координатным плоскостям. Это означает, что одна из переменных становится константой.

В результате, уравнение поверхности превращается в уравнение кривой. Плоская кривая, получаемая в сечении, представляется системой уравнений, одно из которых $z = h$ или $y = h$ или $x = h$, а другое уравнение поверхности. Если в последнее уравнение вместо одной из переменных подставим константу, то получим уравнение, не содержащее эту переменную. Это уравнение позволит построить сечение данной поверхности. Зная ряд сечений, можно получить представление о самой поверхности.

Дадим определения и запишем уравнения поверхностей второго порядка как с несмещенными центрами и вершинами, так и со смещенными в точке $O_0(x_0;y_0;z_0)$.

Определение 7. ***Эллипсоидом*** называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ или } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1, \qquad (3.2.4)$$

где a, b, c – положительные числа, в некоторой декартовой системе координат.

Определение 8. Если a, b, c – попарно не равны друг другу, то эллипсоид называют ***трехосным.***

Определение 9. Если все полуоси эллипсоида равны, т.е. $a=b=c$, то эллипсоид называется ***сферой.*** Обычно уравнение сферы со смещенным центром записывают в виде $(x–x_0)^2 + (y–y_0)^2 + (z–z_0)^2 = R^2$, где R – радиус сферы, $O_0\,(x_0,y_0,z_0)$ – ее центр, а уравнение сферы с центром в начале координат следующее: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Определение 10. ***Однополостным гиперболоидом*** называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ или } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \qquad (3.2.5)$$

в некоторой специально выбранной декартовой системе координат.

Определение 11. ***Двуполостным гиперболоидом*** называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ или } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1 \quad (3.2.6)$$

в некоторой специально выбранной декартовой системе координат.

Определение 12. ***Эллиптическим параболоидом*** называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \text{ или } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=2(z-z_0)$$

в некоторой специально выбранной декартовой системе координат.

Определение 13. ***Гиперболическим параболоидом*** называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \text{ или } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=2(z-z_0)$$

в некоторой специально выбранной декартовой системе координат.

Определение 14. ***Конической поверхностью*** называют поверхность, образованную прямыми линиями, проходящими через заданную точку пространства (вершину) и пересекающими заданную кривую (направляющую), не содержащую вершину. Коническая поверхность в некоторой специально выбранной системе координат задается каноническим уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ или } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0.$$

Определение 15. ***Конусом, или конической поверхностью*****,** называется множество прямых (образующих), соединяющих все точки некоторой линии (направляющей) с данной точкой (вершиной). Если направляющая – кривая 2-го порядка, то получим конус второго порядка. Простейшим конусом второго порядка является ***круглый конус***, или ***прямой круговой конус***, направляющей которого случит окружность, а вершина ортогонально проецируется в ее центр.

Определение 16. ***Цилиндром или цилиндрической поверхностью*****,** называется множество прямых (образующих), параллельных заданному направлению и проходящих через все точки некоторой линии (направляющей). Если направляющая – кривая 2-го порядка, то получим цилиндр второго порядка. Отметим, если образующие параллельны оси Ox, Oy или Oz, то в уравнениях, описывающих цилиндрическую поверхность, будет отсутствовать переменная x, y или z, соответственно**.** В процессе классификации поверхностей второго порядка нам встретились ***эллиптический*****,** ***гиперболический*** **и** ***параболический цилиндры*****.** Каноническое уравнение этих поверхностей соответственно имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$
$$y^2=2px, \quad x^2=2ay \text{ или } (y-y_0)^2=2p(x-x_0), \quad (x-x_0)^2=2a(y-y_0).$$

Типовые задания

Пример 1. Установить форму и свойства однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$. Сделать рисунок.

Решение. Будем пересекать поверхность горизонтальными плоскостями $z=h$. Из системы уравнений.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1+\frac{h^2}{9} \\ z=h\end{cases}.$$

Видно, что в любом таком сечении получается эллипс с полуосями $a_1=4\sqrt{1+h^2/9}, b_1=2\sqrt{1+h^2/9}$.

Сечение плоскостями $x=h$ дает гиперболы: $\begin{cases}\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1-\frac{h^2}{4} \\ x=h\end{cases}$. А сечение плоскостями $y=h$ – гиперболы: $\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1-\frac{h^2}{4} \\ y=h\end{cases}$ (только с другими полуосями).

При h=0 получим сечения поверхности (однополостного гиперболоида) координатными плоскостями z=0 или x=0 или y=0. Эти сечения называют главными. Размеры главных сечений очевидны: в плоскости z=0 эллипс имеет полуоси a=4, b=3, мнимую c=3, в плоскости y=0 гипербола имеет действительную полуось a=4, мнимую c=3. Координатные плоскости является плоскостями симметрии поверхности. Проиллюстрируем геометрическое представление однополостного гиперболоида рисунком (рис. 3.2.8)

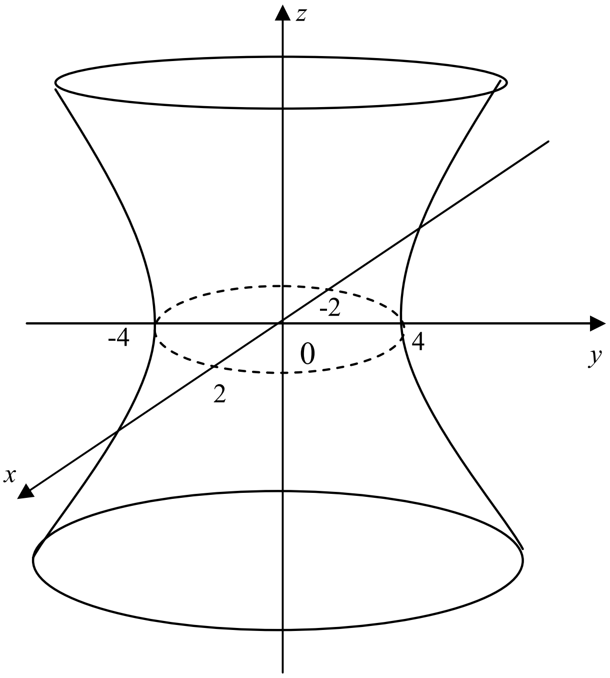


Рис. 3.2.8

Пример 2. Определить вид и параметры поверхности второго порядка, заданной уравнением $3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0$ и построить ее.

Решение. Преобразуем это уравнение, выделив в левой части полные квадраты:

$$3(x^2-2x+1)+4(y^2+4y+4)+6(z^2-6z+9)-3-16-54+49=0,$$

$$3(x-1)^2+4(y+2)^2+6(z-3)^2=24.$$

Поделим обе части уравнения на 24.

Полученное уравнение $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y+2)^2}{6}+\frac{(z-3)^2}{4}=1$ определяет эллипсоид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$(смотри формулу (3.2.4)), для которого $a=2\sqrt{2}, b=\sqrt{6}, c=2$. Центр эллипсоида находится в точке $O_0(1;-2;3)$ (рис. 3.2.9)

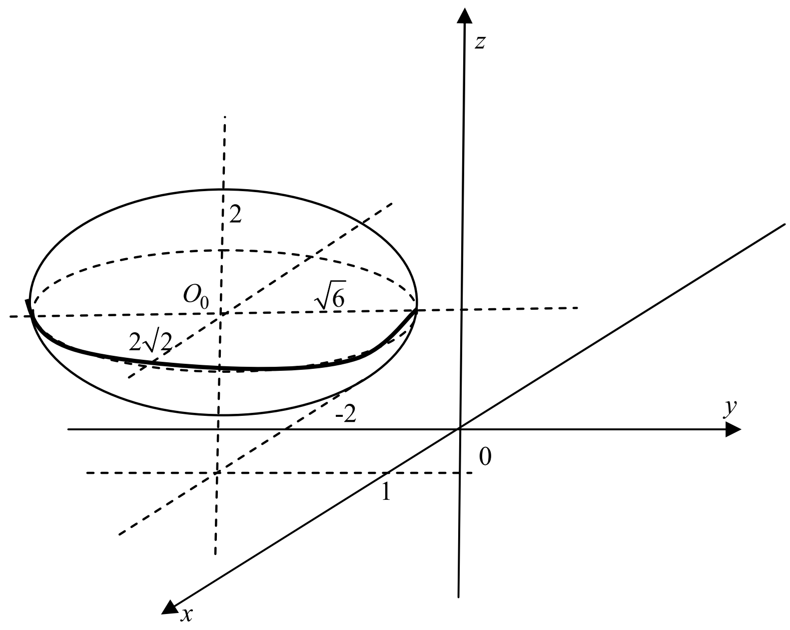


Рис. 3.2.9

Пример 3. Определить вид и параметры поверхности

$$2x^2+3y^2-6z^2-8x+6y+12z-1=0.$$

Решение. Преобразуем это уравнение:

$$2(x^2-4x+4)+3(y^2+2y+1)-6(z^2-2z+1)-8-3+6-1=0,$$

$$2(x-2)^2+3(y+1)^2-6(z-1)^2=6.$$

Поделим обе части уравнения на 6.

Полученное уравнение $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{(z-1)^2}{1}=1$ определяет однополостный гиперболоид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ (смотри формулу (3.2.5), для которого $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, c=1$, с центром в точке O_0(2;-1;1).

Пример 4. Привести к каноническому виду уравнение $x^2-2y^2+4z^2+2x-12y-8z-3=0$, выяснить тип, свойства и расположение заданной этим уравнением поверхности в декартовой системе координат.

Решение. Выделив полные квадраты при входящих в уравнение переменных (т.е сгруппировав члены уравнения указанным ниже образом), имеем:

$$(x^2+2x+1-1)-2(y^2+6y+9-9)+4(z^2-2z+1-1)-3=0,$$

$$(x+1)^2-2(y+3)^2+4(z-1)^2 3+1-18+4=-10,$$

$$\frac{(x+1)^2}{10}-\frac{(y+3)^2}{5}+\frac{(z-1)^2}{5/2}=-1\,.$$

Данная поверхность – двуполостный гиперболоид вида

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$

(смотри формулу (3.2.6)), который имеет $a=\sqrt{10}, b=\sqrt{5}, c=\sqrt{5/2}$, вытянут вдоль оси Oy, а центр находится в точке O_0(-1; -3; 1)

Задания для самостоятельного решения

1. Методом сечений исследовать форму поверхности и построить её:

а) $x^2+2y^2+4z^2=2;$ д) $z^2-y^2=x;$

б) $2x^2-9y^2-z^2=36;$ е) $2x^2+4z^2=4;$

в) $-2x^2+3y^2+4z^2=0;$ ж) $y^2-6z=0.$

г) $2y^2+z^2=2x;$

2. Привести общее уравнение поверхности к каноническому виду, определить название поверхности и построить её:

а) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0;$ г) $5x^2+y^2+10x-6y-10z+14=0;$

б) $36x^2+16y^2-9z^2+18z=9;$ д) $x^2+3z^2-8x+18z+34=0.$

в) $x^2+y^2+z^2=2z;$

3. Построить тело, ограниченное поверхностями:

а) $x^2 = z, z = 0, .2x - y = 0, x + y = 9;$

б) $z^2 = 4 - y, x^2 + y^2 = 4y;$

в) $z = y^2, x^2 + y^2 = 9, z = 0;$

г) $z = y, z = 0, y = \sqrt{4 - x}, y = \frac{1}{2}(x - 1).$

БИЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов [Текст] / А.Ф. Бермант, И.Г. Армонович. - СПб.: «Лань», 2006. – 636 с
2. Болгов, В. А. Сборник задач по математике для втузов: в 3 ч. Ч.1[Текст]/ В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов. -М.: Наука,1993, 480 с.
3. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. - М.: Наука, 1986, 540 с.
4. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебное пособие для втузов [Текст] / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н.Фридман; Под. ред. проф. Н.Ш. Кремер. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. Ч. 1 [Текст] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевников. - М.: Высш. шк., 1996, 380 с.
6. Демидович, Б.П. Курс высшей математики [Текст] / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. - М.: АСТ:Астрель, 2005.
7. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / Б.П. Демидович. - М.: АСТ:Астрель, 2003.
8. Куликова, Е.В. Высшая математика для горных вузов. Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры.: учебное пособие. Ч. 1. [Текст] / Е.В. Куликова. - М.: МГГУ, 2006. – 503 с.
9. Куликов, В. Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел [Текст] / В. Я. Куликов, А. И. Москаленко, А. А. Фомин. - М.: Просвещение, 1993, 454 с.
10. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике [Текст] / А. Д. Мышкис. - М.: Наука, 1993, 640 с.
11. Рублев, А.Н. Линейная алгебра: Учеб. Пособие для втузов [Текст] / А. Н. Рублёв. М.: шк., 1968, 387 с.
12. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 2 ч. Ч.1 -[Текст] / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. - Минск: Высшая шк., 1990, 280 с.
13. Стренг, Г. Линейная алгебра и её применение / Под ред. Г. И. Марчука [Текст] / Г. Стренг.-М.: Мир, 1980, 450 с.
14. Шипачев, В.С. Курс высшей математики [Текст] / В.С. Щипачев. - Москва, «Проспект»,2004.
15. Щипачев, В. С. Сборник задач по высшей математике [Текст] / В. С. Щипачёв. - М.: Высш. шк.,1994, 192 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……………………………………………………………………....2

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА…………..…………………………............3

1.1. Практические занятие по теме «Типы матриц. Действия над матрицами. Методы вычисления определителей»………………………………..…..3

1.1.1. Основные понятия матричной алгебры. Типы матриц………………………………………………………..………………...3
1.1.2. Действие над матрицами…………..……………………………………....6
1.1.3. Определители и методы их вычисления………………………..……14

1.2. Практическое занятие по теме «Обратная матрица. Ранг матрицы»…………………………………………………………….................25

1.2.1. Обратная матрица и метод её нахождения…………..………………25
1.2.2. Ранг матрицы и методы его нахождения……………………..………33

1.3. Практическое занятие по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера матричным методом. Полная схема исследования систем линейных алгебраических уравнений»……………………………………………………………………...…40

1.3.1. Решение систем линейных уравнений с помощью правила Крамера и матричным методом…………………..……………………………………40
1.3.2. Общая схема исследования и решение систем линейных алгебраических уравнений с использованием метода Гаусса……………………………48

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА…………………………..………..…60

2.1. Практическое занятие по теме «Линейные операции над векторами. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис векторного пространства, разложение по базису»…………………….……………...60

2.2. Практическое занятие по теме «Скалярное произведение векторов, условие ортогональности векторов, условие коллинеарности и компланарности векторов»……….……………………………………………69

2.2.1. Скалярное произведение векторов. Условие ортогональности двух векторов……………………………………………………………………..69
2.2.2. Векторное произведение векторов. Условие коллинеарности двух векторов……………………………………………………………………..73

2.2.3. Смешанное произведение векторов. Условие компланарности векторов……………………………………………………………………………..77

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ…………..…………….......82

3.1. Практическое занятие по теме «Плоскость в пространстве, ее уравнение. Прямая в пространстве. Задачи на взаимное расположение прямой и плоскости»……………………………………………………………82

3.1.1. Плоскость в пространстве и ее уравнение. Взаимное расположение плоскостей…………………...………………………………………………...82
3.1.2 Прямая на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости……………………………………………………………………………...89
3.1.3 Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве. Задачи на взаимное расположение прямых и плоскостей…………………………………………………………………………..99

3.2 Практическое занятие по теме «Окружность, эллипс, гипербола, парабола, общее уравнение кривых второго порядка, приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду. Поверхности второго порядка»……………………………………………………………109

3.2.1 Кривые второго порядка……………………..………….................109
3.2.2 Поверхности второго порядка……………………………………...120

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК……………………..……………130